Université Paris-Dauphine Année 2010-2011
DEGEAD 1
UE 13 – Mathématiques

Contrôle continu n° 2 : 14 décembre 2010

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier pas d'indiquer votre numéro de groupe sur la copie.

Exercice 1 Répondez à chaque question de ce questionnaire sans justification. Chaque réponse correcte au QCM rapporte 1 point. Pour toute question incorrecte, 1 point sera enlevé.

1. Le plan tangent au graphe de la fonction $f(x, y) = ye^x + xe^y$ au point $(0, 0)$ vaut $z = y$?
2. Si f et convexe et g concave, alors $f - g$ est convexe.
3. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
4. Pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à la matrice hessienne pour laquelle $r = \lambda$, $t = \lambda - 2$, $s = 0$ est elle toujours strictement positive (excepté pour le vecteur nul) ?

Exercice 2 Soit f définie par $f(x, y) = \frac{y^2-1}{2y-x^2}$.

1. Déterminer et représenter le domaine de définition D_f de f.
2. On admet que cet ensemble est ouvert. Est-il borné ? convexe ?
3. Déterminer et représenter sur le même dessin la courbe de niveau C_k de f pour $k = 0$ et $k = 1$.
4. Montrer que f est de classe C^2 sur son domaine de définition.
5. Calculer les dérivées partielles premières de f.
6. Ecrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(1, 0)$ et en déduire une valeur approchée de $f(1.2, 0.1)$.
7. Calculer la dérivée partielle seconde de f par rapport à x, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$.
8. Vérifier $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 6$. Pour la suite, on admettra également les résultats suivants :

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = -8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = 6.$$

   Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(1, 0)$.
9. Déterminer la position du plan tangent par rapport à la courbe au point $(1, 0)$.
10. Montrer que l'ensemble $\{(x, y); 2y > x^2\}$ est convexe.

Exercice 3 Soit f définie par $f(x, y) = x^2 e^{x+y}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f et justifier qu'elle est de classe C^1 sur son domaine.

2. Calculer les dérivées partielles premières de f.
3. Calculer les élasticités partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
4. On se place au point $(1, -1)$. Dans la suite, on demande des calculs approchés.
   (a) On suppose que x augmente de 5% et y diminue de 5%. Quelle est la variation relative approchée f ?
   (b) On suppose que f varie de 10%. Quelles sont les variations relatives de x et y sachant qu'elles sont égales ? Quelles sont les nouvelles valeurs de x et y ?