Université Paris-Dauphine Année 2009-2010
DEGEAD 1er cycle
UE 13

Contrôle continu n° 2 : le 5 janvier 2010

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier pas de marquer le numéro de votre groupe.

Exercice 1 Questions de cours :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Quand dit-on que f est une fonction convexe ?

Exercice 2

1. Soit la fonction $f(x,y) = \ln(1-2x-5y)$. Donner et tracer son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Nous admettons que c'est un ensemble ouvert. Etudier la convexité de f sur $\mathcal{D}_f$.
2. Etudier la convexité sur son domaine de définition de la fonction $g(x,y) = -x^2 - 5y^2 + xy$.

Exercice 3 Soit la fonction f définie par $f(x,y) = (x+y-2)^2 + \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$.

1. Donner le domaine de définition et montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition. Nous admettons que c'est un ensemble ouvert.
2. En tout point du domaine de définition donner le gradient et la matrice hessienne de f.
3. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(2,1)$.
4. Donner l'équation du plan tangent et sa position au voisinage du point $(2,1)$.
5. Etudier la convexité de f sur son domaine de définition.
6. Au point $(2,1)$, on suppose que f et x augmentent relativement de 5%. De façon relative et approximative, de combien y va-t-il varier ?
7. Donner une approximation de $f(1,9;1,2)$.
8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x,x) - 4(x-1)^2$. Donner les extrema de g et préciser s'ils sont locaux ou globaux.

Exercice 4 On considère la fonction réelle de deux variables f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y-2x^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On suppose que cet ensemble est ouvert. Est il convexe ? Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
2. Représenter sur le même dessin que la question 1. les courbes de niveau C_1 et $C_{-1/2}$ et C_0.
3. En tout point de $\mathcal{D}_f$, calculer le gradient de f.
4. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(1,1)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(0,9;1,1)$.