Contrôle continu n° 2 : le 4 janvier 2012

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier de marquer le numéro de groupe.

Exercice 1 Questions de cours :

1. Énoncez le théorème de Schwarz.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert convexe D de $\mathbb{R}^2$. Quand dit-on que f est une fonction concave ?
3. On suppose qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^2$ admet un DL à l'ordre 2 au voisinage du point $(1, 1)$ donné par :

$$f(1+h, 1+k) = 2 + h + h^2 + k^2 + 6hk + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

- (a) Que valent $f(1, 1)$, $\nabla f(1, 1)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)$?
- (b) Donner l'équation cartésienne du plan tangent au graphe de la courbe au point $(1, 1)$. Précisez un point et un vecteur orthogonal.
- (c) Quelle est la position du graphe de f par rapport au plan tangent autour du point $(1, 1, f(1, 1))$?
- (d) La fonction est-elle convexe ? concave ?
- (e) Quelles sont les élasticités de f par rapport à x et y au point $(1, 1)$?

Exercice 2 Pour $\alpha, \beta > 0$, on définit la fonction

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta.$$

1. Montrez que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Nous admettons que D est un ensemble ouvert.
2. D est-il convexe (justifiez votre réponse) ? Tracez D en utilisant une page entière (pour les questions suivantes).
3. En tout point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, donnez le gradient et la matrice hessienne de f .
4. Écrivez le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(1, 1)$.
5. Donnez une approximation au premier ordre de $(1, 01)^2 \times (0, 98)^{0,5}$.
6. Dans cette question, on suppose que $\alpha + \beta \leq 1$. Montrez que f est concave.
7. Dans cette question, on suppose que $\alpha + \beta > 1$. Montrez que f n'est ni convexe ni concave.
8. Pour $\alpha = 2$ et $\beta = 0,5$, explicitez et tracez sur votre dessin les courbes de niveaux 1 et 2 et la courbe de niveau passant par le point $(\sqrt{2}, 4)$. Placez également sur le dessin le vecteur $\nabla f(1, 1)$ au point $(1, 1)$.