
Contrôle continu n° 2 : 11 janvier 2005

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Question de cours) Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et soit (x_0, y_0) un élément de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner l'équation du plan tangent à f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Donner la définition d'un développement limité de f au point (x_0, y_0) à l'ordre 2.
3. Donner la définition d'un minimum local de f au point (x_0, y_0) ?

Exercice 2 Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x/2 - y/2 + \ln(e^x + e^y)$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f .
3. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique.
4. Etudier la convexité de f .
5. Montrer que f admet un minimum global au point $(0, 0)$ et calculer ce minimum.

Exercice 3

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.
 - (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g .
 - (b) Montrer que g est C^1 sur $\mathcal{D}_g$ et calculer sa dérivée g' .
 - (c) Etudier les variations de g et déterminer $g(\mathcal{D}_g)$.
 - (d) Montrer qu'il existe un unique réel α , élément de $]0, 1/e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par $f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$.
 - (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f . Montrer que c'est un convexe de $\mathbb{R}^2$. On admettra que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_f$.
 - (c) Donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en un point quelconque de $\mathcal{D}_f$.
 - (d) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 au point $(1, 2)$. Ecrire l'équation du plan tangent en ce point et donner la position de la courbe par rapport à son plan tangent.
 - (e) En utilisant la question 1, montrer que $(\alpha, 0)$ est un point critique de f . Existe-t-il d'autres points critiques ?
 - (f) Ecrire l'équation du plan tangent en $(\alpha, 0)$ et donner la position de la courbe par rapport à son plan tangent.
 - (g) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$ est un minimum local de f .