Université Paris-Dauphine Année 2003-2004
UFR GEA 1cycle
UV 13 premier semestre
15 janvier 2004

Contrôle n° 2

Attention à la présentation, document et calculatrice interdits.

Exercice 1 Questions de cours :

1. Donner la définition d'un minimum local et d'un maximum global pour une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. Donner la définition d'une fonction convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient les fonctions suivantes

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6, \quad g(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10.$$

1. Étudier la convexité de f et g.
2. Trouver les extrema de f et préciser si ce sont des minima, maxima, locaux ou globaux.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes en un point arbitraire de $\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy).$$

Exercice 4 Soient les fonctions f et g suivantes

$$f(x,y) = x^2 e^{xy}, \quad g(x,y) = \ln(2 - \sqrt{x^2+y^2}).$$

Pour ces deux fonctions répondre aux questions suivantes.

1. Donner le domaine de définition. On admet que ce domaine est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction est de classe C^2 sur son domaine de définition.
3. Donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en un point quelconque du domaine de définition.
4. Écrire le développement limité à l'ordre 2 au point $(1,0)$.
5. Écrire l'équation du plan tangent au point $(1,0)$ et donner la position de la courbe par rapport à son plan tangent.