Université Paris-Dauphine
UFR GEA 1er cycle

Année 2005-2006

Contrôle continu n° 2 : 13 janvier 2006

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Exercice 1

1. **(1 pt)** Donner la défintion d'un minimum gobal et d'un maximum local d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. **(1 pt)** Donner la définition d'une fonction convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et donner un critère lorsque celle-ci est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Soient les fonctions f et g suivantes :

$$f(x,y) = x - y^2 - \frac{1}{2}xy + 2 - 2x^2 \quad g(x,y) = x^4 + x^2y + \frac{1}{4}y^2 - 1.$$

1. **(1,5 pt)** Etudier la convexité de f et g sur $\mathbb{R}^2$.
2. **(1,5 pt)** Trouver les extrema de f et préciser si ce sont des minima ou des maxima, s'ils sont locaux ou globaux.

Exercice 3 (3 pt) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes en un point arbitraire (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = f(2x - y + 3), \quad h(x,y) = f(x^3 - y^3).$$

On exprimera le résultat en fonction de f'.

Exercice 4 Soit f la fonction suivante :

$$f(x,y) = -\ln(xy) - \ln(4 - (x^2 + y^2)).$$

1. **(2 pt)** Donner $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f et faire une représentation graphique.
2. **(1 pt)** Ce domaine est il convexe ? Borné ?
   On admet que le domaine de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. **(1 pt)** Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
4. **(2 pt)** Donner le développement limité à l'odre 2 au voisinage de $(1,1)$.
5. **(1 pt)** Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative au voisinage de $(1,1)$.
6. **(2 pt)** Etudier la position du plan par rapport à la surface au voisinage de $(1,1)$.
7. **(2 pt)** Etudier la convexité sur son domaine de définition de la fonction suivante :

$$h(x,y) = \ln(4 - (x^2 + y^2)).$$

8. **(1 pt)** En déduire la convexité de f sur l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$. On vérifiera que c'est bien un ensemble convexe.