Université Paris-Dauphine
Département LSO 1er cycle

Année 2006-2007

Examen de mathématiques (UV13) septembre 2007

Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Une firme (en situation de monopole) produit un unique bien qui peut être vendu à deux clients a et b. Si la firme produit la quantité Q_a d'unités de bien pour le client a, alors celui-ci est disposé à payer le prix unitaire de $50 - 5Q_a$. Si la firme produit la quantité Q_b d'unités de bien pour le client b, alors celui-ci est disposé à payer le prix unitaire de $100 - 10Q_b$. Le coût pour la firme de produire Q unités de bien est $90 + 20Q$.

1) Que représente la fonction Π définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par

$$\Pi(Q_a, Q_b) = Q_a(50 - 5Q_a) + Q_b(100 - 10Q_b) - [90 + 20(Q_a + Q_b)].$$

2) Si la firme veut maximiser son profit, quelle quantité de biens doit-elle produire et vendre à chaque client ? Calculer alors le profit maximal.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-x)$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$.

1) On suppose que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé. Montrer qu'il est compact.

2) Représenter, sur un même graphique, les courbes de niveau -3, 0 et 3 de la fonction f ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

3) Déterminer, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les extrema de f sur $\mathcal{E}$ et leur nature. Placer les points sur le dessin.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 3\}$.

1) On suppose que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé. Montrer qu'il est compact.

2) On cherche à optimiser f sur $\mathcal{E}$.

   a) Trouver les 6 points critiques de première espèce sous contrainte.

   b) Déterminer la nature de chaque point critique.

Exercice 5 On considère $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer le point de $\mathcal{C}$ qui est le plus éloigné du point $A = (1, 1, 0)$ au sens de la distance euclidienne.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x + y)^2.$$

   Déterminer les extrema locaux de f sur l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 1\}.$$

2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est compact (on admet que $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$).

3) Montrer les deux propriétés suivantes :
   (a) si $(x, y, z) \in \mathcal{C}$ alors $(x, y) \in \mathcal{E}$,
   (b) si $(x, y) \in \mathcal{E}$ alors $(x, y, -x - y) \in \mathcal{C}$.

4) Soit la fonction F définie par

$$\forall M = (x, y, z), \quad F(x, y, z) = d(M, A)^2.$$

   Répondre à la question initiale.