
EXAMEN FEVRIER 2008

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (6 points)

Les calculs de cet exercice sont simples. Nous demandons donc une très grande clarté et une cohérence quant aux résultats.

Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y . Le modèle X , le plus abordable, se vend à 1 \$ pièce. Quant au modèle Y , beaucoup plus sophistiqué, se vend à 3 \$.

Le coût de fabrication, exprimé en \$, est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000,$$

où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y . On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché.

1. Pour tout $(x, y) \in (R^{+*})^2$, donner $P(x, y)$, le profit de l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y .
2. La fonction P est-elle convexe ou concave sur $(R^{+*})^2$?
3. La capacité de production de l'entreprise est au total 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition maximale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien.

Calculer dans ce cas le profit réalisé.

4. Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante.

Pouvez-vous aider le conseil d'administration à prendre sa décision ?

Exercice 2 (11 + 2 points de bonus)

Soient les fonctions f et g suivantes

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \ln(x + y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = x + xy + y.$$

1. Etude de f
 - (a) Donner D_f l'ensemble de définition de f . On admet que D_f est un ouvert de R^2 . Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur son ensemble de définition.
 - (b) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage du point $(1, 1)$.
 - (c) Donner l'équation du plan tangent au graphe au point $(1, 1)$ et donner sa position par rapport au graphe de f .

- (d) Donner l'approximation affine de f au voisinage du point $(1, 1)$. Calculer ensuite une approximation de $f(1, 2; 0, 98)$. Vous pouvez utiliser pour cette question l'approximation suivante $\ln(2) \sim 0,69$.
 - (e) La fonction f est-elle bornée?
 - (f) **(Question facultative)** Etudier la convexité de f sur son ensemble de définition.
2. Calcul des extrema de f sous contrainte $g(x, y) = 3$.
- (a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de deuxième espèce sous la contrainte $\{(x, y) \in D_f \mid g(x, y) = 3\}$.
 - (b) Calculer le point critique de première espèce sous la contrainte $\{(x, y) \in D_f \mid g(x, y) = 3\}$.
Vous pouvez montrer dans un premier temps qu'il y a deux possibilités : $x = y$ ou alors $\lambda = -1$. Conclure à l'impossibilité de ce second cas en posant $u = x + y$.
 - (c) Donner la nature des points critiques (maxima locaux ou points cols) sous la contrainte $\{(x, y) \in D_f \mid g(x, y) = 3\}$.
 - (d) Soit la fonction

$$\Phi(x) = \frac{3 - x}{1 + x}.$$

Etudier les variations de Φ sur son ensemble de définition et tracer son graphe.

- (e) Dessiner maintenant la contrainte $\{(x, y) \in D_f \mid g(x, y) = 3\}$ avec le point critique de première espèce sous la contrainte $\{(x, y) \in D_f \mid g(x, y) = 3\}$ que vous avez trouvé précédemment.

Exercice 3 (4 points)

Soit la fonction

$$f(x, y) = (2 - x)e^{x^2 + y^2 - xy}.$$

1. Calculer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la courbe de niveau 0 de f . Montrer que le point $(2, 0)$ appartient à cette courbe de niveau et donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe de niveau en ce point.