Université Paris-Dauphine Année 2008-2009
DUGEAD 1er cycle, UE 13

Session de septembre

Durée 2h, les documents et calculatrices sont interdits.
La qualité de rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 On considère la fonction $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}\ln(x)$. On admet que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que g est convexe sur son domaine de définition.
   En déduire que :
   $$\forall x > 0,\ g(x) = x^2 - \frac{1}{2}\ln(x) \geqslant \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$
2. Étudier les variations de g et en déduire qu'elle admet un minimum global dont on donnera la valeur.
3. Soit y un réel. Déterminer, suivant la valeur de y, le nombre de solutions de l'équation $g(x) - y = 0$.

Exercice 2 Soit la fonction de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{x^4+y^4-2xy}.$$

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 en un point (x, y) arbitraire de $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $D^2f_{(0,0)}$ et en déduire la convexité de la fonction f.
3) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(0, 1)$.
4) Déterminer l'équation du plan tangent au point $(0, 1)$ et sa position au voisinage de ce point par rapport à la courbe représentative de f.
5) Calculer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les élasticités $e_{f/x}(x, y)$ et $e_{f/y}(x, y)$.
6) En déduire une approximation de l'accroissement relatif de f au voisinage de $(1, 2)$ lorsque x croît de 3% et y croît de 2%.

Exercice 3 On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Cet ensemble est-il convexe ? On admet que $\mathcal{D}$ est un ensemble ouvert.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer le gradient de f en chaque point de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage du point $(1, 2)$.
4. On cherche les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathcal{D} :\ x^2 + y^2 = 2\}$.

(a) Montrer qu'il n'existe pas de point critique de seconde espèce.

(b) Montrer que si $(x, y) \in \mathcal{E}$ est un point critique de première espèce tel que $xy \neq 0$, alors $x^4 = y^4$.

(c) Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{E}$.

5. Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{D}$. *On pourra étudier le signe de f sur $\mathcal{D}$.*
6. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathcal{D} : \ x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.