Université Paris-Dauphine Année 2008-2009

DUGEAD 1er cycle, UE 13

Examen du 5 février

Durée 2h, les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur R^2 par

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2}e^{x-1} - \frac{x}{2} - y.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'unique point critique M_0 de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les dérivées secondes de f et en déduire la nature de M_0.
4. La fonction f est-elle convexe ?
5. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $M_1 = (1, -2)$. Préciser l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1, -2, f(1, -2))$, et la position de la surface représentative de f par rapport à ce plan.
6. Ecrire l'approximation affine de f en M_1. En déduire une valeur approchée de f(0.9,-1.95).
7. Calculer $e_{f/x}(M_1)$ et $e_{f/y}(M_1)$. A partir du point M_1, on suppose que les variations relatives de x et y vérifient $\frac{\Delta x}{x} = \frac{2}{3}\frac{\Delta y}{y}$.
   Si f augmente de 2% à partir de M_1, déterminer les variations relatives de x et de y qui ont provoqué ce changement.

Problème :

Partie 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y.$$

a) Calculer les points critiques de f et donner leur nature locale.

b) En étudiant f, préciser si les extrema locaux trouvés à la question précédentes sont globaux ou pas.

c) Rechercher et représenter sur un graphique la courbe de niveau 0 de f.

Partie 2 : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = x^2 + y^2.$$

On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x,y) = 1$.

a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x,y) = 1$.

b) Chercher les 6 points critiques de première espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$. Représenter ces points critiques sur un dessin.

c) Donner le maximum et le minimum global de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

d) Donner la nature des autres points critiques sous la contrainte $g(x, y) = 1$.