Université Paris-Dauphine Année 2009–2010
DEGEAD 1er cycle, UE 13

Examen du 3 septembre 2010

Durée 2h. Les documents et calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 On considère les ensembles

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 8x + 6y < 0 \text{ et } 2x + y > 0\right\} \text{ et } B = [1, +\infty[\times[-5, 2[.$$

1. Faites une représentation géométrique de $E = A \cap B$ (E sera hâchuré).
2. En justifiant votre réponse, indiquer si l'ensemble E est convexe ? borné ?

Exercice 2 On considère la fonction f de deux variables définie par

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y+3}}{\sqrt{16 - x^2}} \ln(x^2 - 2y - 4)$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Faire une représentation graphique de $\mathcal{D}$. Ce domaine est-il borné ? convexe ?
3. Déterminer la courbe de niveau 0, notée $\mathcal{C}_0$, de f. Tracer en rouge $\mathcal{C}_0$ sur le même dessin que celui de $\mathcal{D}$.

Exercice 3 Soient les fonctions f et g suivantes :

$$f(x, y) = x^2 + y - \ln(x^2 + y^2 - 3),$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4.$$

On recherche, dans cet exercice, les extrema de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

1) Donner $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f et montrer que

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Tracer les deux ensembles sur le même dessin.
Nous admettons que $\mathcal{D}_f$ est un ouvert et que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.

2) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de deuxième espèce pour ce problème.

3) On cherche les points critiques de première espèce pour f sur $\mathcal{D}_f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

a) Montrer que si (x, y) est un point critique alors on obtient $\lambda x = 0$, où λ est le multiplicateur de Lagrange associé.

b) En déduire alors les 4 points critiques de première espèce ainsi que leur multiplicateur de Lagrange associé.

4) Sous la contrainte $g(x, y) = 0$, f admet-elle un minimum global et un maximum global ?

5) Préciser les points pour lesquels ces extrema globaux sous contrainte sont atteints.

6) Trouver la nature des autres points critiques.