

Examen du 4 février 2010, 9h-11h

Durée 2h. Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 Soit $\mathcal{D} = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p > 0, q > 0\}$. On admet que $\mathcal{D}$ est ouvert. Soient x et y les quantités demandées de deux biens X et Y en fonction de leurs prix unitaires p et q . Sur $\mathcal{D}$, on définit les fonctions de demande f et g par :

$$x = f(p, q) = \frac{1}{pq} e^{q-1} e^{p-2} \quad \text{et} \quad y = g(p, q) = \frac{1}{pq^2} e^{q-1} e^{p-2}.$$

– **Partie 1 :**

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
2. Calculer les gradients des fonctions f et g en tout point de $\mathcal{D}$.
3. Donner les élasticités relatives des fonctions f et g en tout point de $\mathcal{D}$.
On suppose dans la suite de cette partie que les prix unitaires initiaux valent $p_0 = 1$ et $q_0 = 2$.
4. On suppose que q est fixé à la valeur 1. Quelle variation relative doit-on attribuer à p à partir de 2 pour que la demande en bien X augmente de 5% ? Quelle sera alors la variation relative correspondante de la demande en bien Y ? Ce modèle est-il raisonnable ?
5. On suppose que p augmente de 5% à partir de 2 et que q diminue de 3% à partir de 1. Quelles sont les variations relatives correspondantes des demandes en bien X et Y ?
6. On observe maintenant une augmentation de la demande en bien X de 2%, la demande en bien Y restant constante. Quelles variations relatives des prix ont provoqué ce changement ?

– **Partie 2 :** On définit le chiffre d'affaires par : pour tout $(p, q) \in \mathcal{D}$,

$$\Phi(p, q) = p f(p, q) + q g(p, q).$$

1. Trouver les points critiques de Φ sur $\mathcal{D}$.
2. Montrer que Φ est convexe sur $\mathcal{D}$. *Indication : On pourra passer au logarithme sur chacune des fonctions $(p, q) \mapsto p f(p, q)$ et $(p, q) \mapsto q g(p, q)$.*
3. Optimiser Φ sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire trouver les optima locaux sur $\mathcal{D}$ et préciser s'ils sont globaux.

Exercice 2 Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - x^2 - x, \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition, que l'on précisera.
2. Montrer que f n'admet aucun extremum global sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer les points critiques de f .
4. Donner la nature des points critiques de f .
On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
5. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
6. Chercher les 4 points critiques de première espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$. Représenter ces points critiques sur un dessin.
7. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sous la contrainte $g(x, y) = 1$. Préciser les points où ces extrema sont atteints et leurs valeurs.
8. Étudier la nature du point critique restant.