Université Paris-Dauphine
Département LSO 1er cycle

Année 2006-2007

Examen de mathématiques (UV13) du 8 février 2007

Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifé.

Les 2 exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}.$$

A) (9 points)

1. Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(u) = ue^{-\frac{u^2}{2}}$. Montrer que ϕ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer ϕ' et ϕ''.

2. Déterminer les extrema de ϕ sur $\mathbb{R}$ et donner le plus grand intervalle (au sens de l'inclusion) sur lequel ϕ est convexe.

3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $f(x,y)$ en fonction de $\phi(x)$ et $\phi(y)$. En déduire une expression des dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de ϕ et ϕ'.

4. Déterminer les cinq points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

5. Toujours à l'aide des fonctions ϕ, ϕ' et ϕ'', donner la matrice hessienne de f (i.e. les dérivées partielles secondes de f) en un point quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

6. Donner la nature locale de tous les points critiques. *Une attention particulière sera donnée à cette question.*

7. On pose $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \ \text{ et } y > 0\}$. On suppose que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- **a)** Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.
- **b)** Montrer que la fonction composée $h = \ln \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et étudier la convexité ou la concavité de h sur $\mathcal{D}$.
- **c)** En déduire sans calcul les extrema de f sur $\mathcal{D}$.
- **d)** Montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$.

B) (4 points) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

1. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce de f sous la contrainte $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 0\}$.
2. Montrer que $(x,y) \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifient l'équation $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ si et seulement si
$$\begin{cases} y^3 e^{-1/2} = 2\lambda x \\ x^3 e^{-1/2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
3. Trouver les quatre points critiques de première espèce de f sous la contrainte $\mathcal{E}$.
4. Donner la nature de ces points critiques et donner les extrema de f sous la contrainte $\mathcal{E}$. Représenter sur un dessin la contrainte et les différents points critiques.

Exercice 2. (8 points)
On considère la fonction réelle de deux variables f définie par

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer et représenter (sur le même graphique que pour la question précédente) la courbe de niveau $\mathcal{C}_k$ pour $k = -2$ et $k = 1$.
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
4. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.2)$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau $\mathcal{C}_1$ au point $(1,1)$.
5. Trouver les extrema de f sur $\mathcal{D}_f$.
6. Trouver les extrema de f sur le cercle de centre $(-1,-1)$ et rayon $\sqrt{2}$. *On pourra utiliser la question 2.*
7. Etudier la convexité ou la concavité de f sur les ensembles E_1 et E_2 définis par

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x + y > 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x + y < 0\}.$$