Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = x^2y + y^3$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

3. À l'aide de la question précédente, donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1\,;0\,;0)$.

4. Préciser la position de ce plan par rapport à la surface de f, au voisinage de $(1\,;0\,;0)$.

Exercice 2

Pour modéliser la production d'une entreprise, on utilise souvent le *modèle de Cobb-Douglas* ; les fonctions qui suivent ce modèle sont définies par la formule $f(x\,;y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, où A, α et β désignent des réels strictement positifs.

Soit f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;10[^2$ par $f(x\,;y) = \dfrac{y\sqrt{x}}{4}$.

1. Vérifier que f est une fonction de Cobb-Douglas en exhibant les valeurs de A, α et β.

2. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(1\,;1)$.

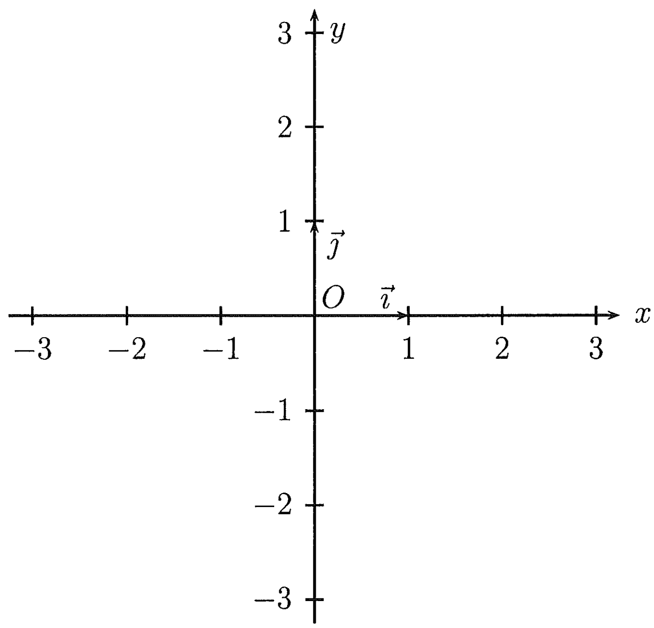
3. Donner une valeur décimale, approchée à l'ordre 1, de $f(0{,}8\,;1{,}3)$.

4. Calculer les élasticités partielles de f.

5. Généraliser le résultat de la question précédente en montrant que, pour une fonction f de Cobb-Douglas quelconque, on a $e_{f/x}(x\,;y) = \alpha$ et $e_{f/y}(x\,;y) = \beta$.

Exercice 3

Calculer le hessien au point $(-1\,;2)$ de la fonction f, définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = y(-4x^2 + y^2)$, puis représenter la courbe de niveau $z = 0$ de f dans le repère ci-dessous. Cette courbe de niveau est-elle une partie convexe de $\mathbb{R}^2$? Justifier.



Exercice 4

Soit f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = xy - x + y + 5$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point $(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.

3. À l'aide de la question précédente, donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(0\,;2\,;7)$.

4. Préciser la position de ce plan par rapport à la surface de f, au voisinage de $(0\,;2\,;7)$.

Exercice 5

Le bénéfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production. On appelle x le montant des investissements, en millions d'euros, et y la quantité produite, en milliers d'unités. On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;6[\times]0\,;11[$ par $B(x\,;y) = x^2ye^{-x}$.

1. Indiquer, sans justifier, si $]0\,;6[\times]0\,;11[$ est un borné de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer le gradient de B en tout point de $]0\,;6[\times]0\,;11[$.

3. Donner une valeur approchée de la variation relative du bénéfice si la production augmente de 2 %, l'investissement demeurant constant.

4. L'entreprise passe d'un investissement de 4 000 000 d'euros à un investissement de 4 200 000 euros, et augmente sa production de 7 %. Quelle variation relative approchée du bénéfice l'entreprise peut-elle espérer suite à ces modifications ?

5. On suppose que la quantité produite vaut 10 000 unités. Quel doit être le montant des investissements pour que le bénéfice de l'entreprise soit maximal ?

Exercice 6

On considère la fonction f de deux variables définie par $f(x\,;y) = 4x^2 - 3xy + y^2 - 2x - y$.
On appelle $\mathcal{S}_f$ la surface représentative de la fonction f dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Écrire une équation du plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en tout point de $\mathcal{S}_f$.

3. Montrer qu'il existe un point A de $\mathcal{S}_f$, noté $(a\,;b\,;c)$, en lequel ce plan est horizontal.

4. Avec les valeurs trouvées précédemment, démontrer : $\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(a+x\,;b+y) - c \geqslant 0$.

On pourra remarquer que $-3xy + y^2 = \left(y - \dfrac{3x}{2}\right)^2 - \dfrac{9x^2}{4}$ *pour tous réels* x *et* y.

Exercice 7

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x\,;y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et montrer qu'il n'est ni borné, ni convexe.

2. Montrer l'égalité : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 8

Pour modéliser la production d'une entreprise, on utilise souvent le *modèle de Cobb-Douglas* ; les fonctions qui suivent ce modèle sont définies par la formule $f(x\,;y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, où A, α et β désignent des réels strictement positifs.

Soit f la fonction définie pour tout $(x\,;y)$ de $]0\,;10[^2$ par $f(x\,;y) = x^{\frac{1}{3}}\sqrt{4y}$.

1. Vérifier que f est une fonction de Cobb-Douglas en exhibant les valeurs de A, α et β.

2. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(1\,;1)$.

3. Donner une valeur décimale approchée de $f(1{,}3\,;1)$ à l'ordre 1.

4. Calculer les élasticités partielles de f.

5. Généraliser le résultat de la question précédente en montrant que, pour une fonction f de Cobb-Douglas quelconque, on a $e_{f/x}(x\,;y) = \alpha$ et $e_{f/y}(x\,;y) = \beta$.

Exercice 9

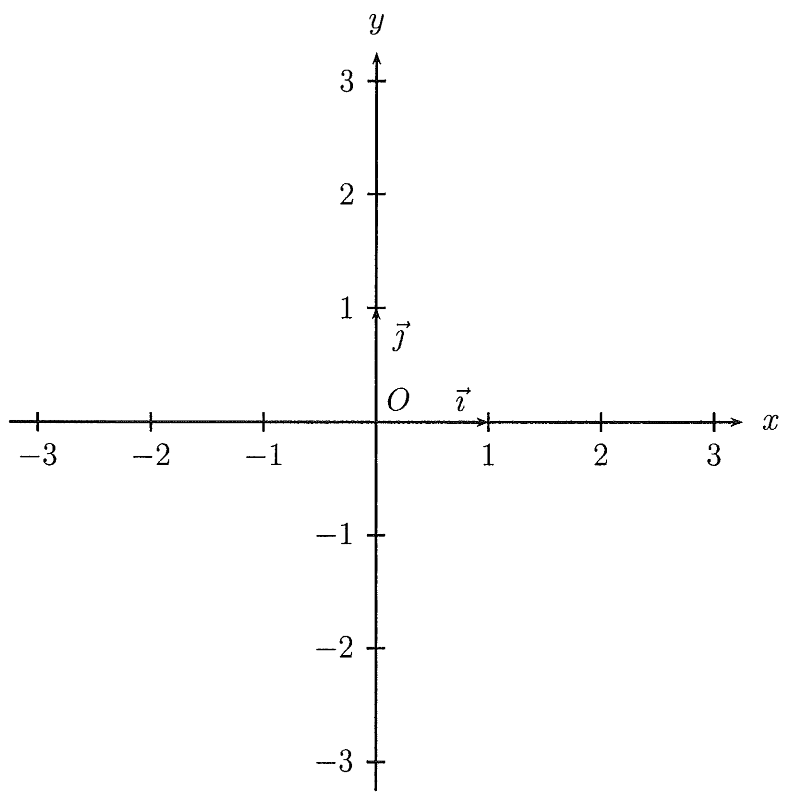
On note A l'ensemble $\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ (1-x^2)(1-y^2) > 0\}$.

Soit f la fonction définie pour tout couple $(x\,;y)$ de A par $f(x\,;y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

1. Représenter A dans le repère ci-dessous et démontrer que A n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. Dire précisément pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A.

3. Démontrer qu'une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;1)$ est $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - z - 3 = 0$.



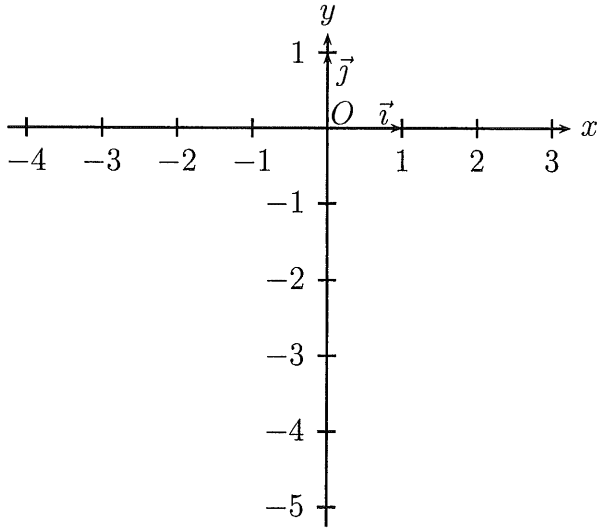
Exercice 10

Soit f la fonction définie par la formule $f(x\,;y) = \ln(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4)$.

1. Représenter ci-dessous l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que l'ensemble de définition de f n'est ni borné, ni convexe.

3. Calculer le gradient de f au point $(1\,;0)$.



Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x\,;y) = \ln(x^2 + y^2 - 4x + 3) + \sqrt{4x - x^2 - y^2} + y^{-\frac{1}{2}}$.

1. Représenter ci-dessous l'ensemble de définition de f.

2. Démontrer que l'ensemble de définition de f est une partie bornée non convexe.

3. L'ensemble de définition de f est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$? *Aucune justification n'est attendue.*

4. Donner l'image de $(1\,;1)$ par la fonction f.

5. Montrer que la fonction g d'une variable réelle définie par $g(x) = f(1\,;x)$ admet $]0\,;\sqrt{3}]$ comme domaine de définition.