CORRECTION D'EXERCICES

Exercice 2.19

1. La quantité $f(x)$ n'existe que si le réel x est non nul, à cause du quotient $\frac{1}{x}$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est donc } \mathbb{R}^*.}$$

2. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$. De là, par somme, la fonction $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$. Par composition avec la fonction exponentielle, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$. Enfin, par produit avec la fonction $x \mapsto x$, elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, on peut affirmer :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0\,;+\infty[.}$$

Étudions tout d'abord la limite de f en $+\infty$. Par somme, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

D'autre part, on sait :

$$\lim_{X\to+\infty}\left(e^X\right) = +\infty.$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\exp\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty.$$

Par produit avec $x \mapsto x$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, il vient finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

Étudions à présent la limite de f en 0 en remarquant que, pour tout réel x non nul :

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\exp(x^2).$$

Rappelons que :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Par croissances comparées, on a aussi :

$$\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{e^X}{X}\right) = +\infty.$$

De là :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty.$$

Comme :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\exp(x^2)\right)=1,$$

il vient finalement, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty}.$$

3. La fonction g, définie pour tout réel x positif ou nul par $g(x)=x+2x^3-1$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g'(x)=6x^2+1.$$

Il est clair que g' est strictement positive ; on peut ainsi affirmer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, g est continue sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $g(0)$ est strictement négatif et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. On peut donc affirmer qu'il existe un unique a de $\mathbb{R}_+$ tel que $g(a)=0$.

De plus, comme $g(0)=-1$ et $g(1)=2$, nous sommes assurés d'avoir a dans $]0\,;1[$ par stricte croissance de g.

4. Après calculs, on obtient :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}\exp\left(x^2+\frac{1}{x}\right).$$

La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, les fonctions f' et g ont le même signe sur $]0\,;+\infty[$. Dans la question précédente, on a établi :

$$\begin{cases}\forall x\in\,]0\,;a[,\ g(x)<0\\[2ex] g(a)=0\\[2ex] \forall x\in\,]a\,;+\infty[,\ g(x)>0.\end{cases}$$

Nous obtenons ainsi le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		a		$+\infty$
variations de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Quel que soit le réel x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x}\exp\left(x^2+\frac{1}{x}\right),$$

et donc :

$$f''(x)=\left(\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}+2x\frac{g(x)}{x}-\frac{g(x)}{x^3}\right)\exp\left(x^2+\frac{1}{x}\right),$$

qu'il est possible de simplifier en :

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 g'(x) + (2x^2 - x - 1)g(x)}{x^3}\right) \exp\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

On peut donc affirmer :

$$f(1) = e^2 \text{ et } f'(1) = 2e^2 \text{ et } f''(1) = 7e^2.$$

Le développement limité de f s'écrit donc, pour tout réel x strictement positif :

$$\boxed{f(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 7e^2(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1), \text{ avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0.}$$

6. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on peut écrire :

$$f(x) - (e^2 + 2e^2(x-1)) = (x-1)^2(7e^2 + \varepsilon(x-1)), \text{ avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0.$$

Comme $7e^2 + \varepsilon(x-1)$ est positif pour peu que x soit proche de 1, et que $(x-1)^2$ est positif pour tout réel x, il est possible d'affirmer :

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1, au voisinage de ce point.}}$$

7. En remarquant que $2x^2 - x - 1$ peut s'écrire $(x-1)(2x+1)$ pour tout réel x, l'expression algébrique de f'' obtenue à la question **5.** s'écrit :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, f''(x) = \left(\frac{g'(x)}{x} + \frac{(x-1)(2x+1)g(x)}{x^3}\right) \exp\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Il alors clair que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$(x-1)(2x+1) \geqslant 0$$

et les questions **3.** et **4.** permettent d'affirmer, étant donné que $a < 1$:

$$\forall x \in [1\,;+\infty[, \; g(x) \geqslant 0.$$

D'autre part, d'après la question **3.**, la fonction g' est positive.

Finalement, la dérivée seconde de f est positive sur $[1\,;+\infty[$. Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est convexe sur } [1\,;+\infty[.}$$

Exercice 2.37

1. La quantité $f(x)$ n'est définie que pour les réels x tels que $x-1>0$ et $2x-2 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est donc }]1\,;+\infty[.}$$

On remarque que, pour tout x de $]1\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{2} - \frac{x}{2x-2}.$$

La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto x-1$, si définie sur $]1\,;+\infty[$, est de classe $\mathcal{C}^2$ et à valeurs dans $]0\,;+\infty[$.

Par composition, $x \mapsto \ln(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1\,;+\infty[$.

D'autre part, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2x-2}$ est une fraction rationnelle : elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1\,;+\infty[$. Par différence :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]1\,;+\infty[.}$$

2. Après calculs, on obtient, pour tout x de $]1\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x}{2(x-1)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{-x-1}{2(x-1)^3}.$$

On peut donc affirmer :

$$f(2) = -1 \text{ et } f'(2) = 1 \text{ et } f''(2) = \frac{-3}{2}.$$

Le développement limité de f en 2 peut ainsi s'écrire, pour tout x de $]1\,;+\infty[$:

$$\boxed{f(x) = -1 + (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2), \text{ avec } \lim_{x\to 2}\varepsilon(x-2) = 0.}$$

3. L'approximation affine de f au point 2 est la fonction $\hat{f}$ définie pour tout réel x par $\hat{f}(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$. D'après la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = x-3.}$$

Le développement limité obtenu à la question précédente s'écrit, pour tout x de $]1\,;+\infty[$:

$$f(x) - (x-3) = (x-2)^2\left(-\frac{3}{4} + \varepsilon(x-2)\right), \text{ avec } \lim_{x\to 2}\varepsilon(x-2) = 0.$$

Lorsque x est proche de 2, la quantité $\left(-\dfrac{3}{4} + \varepsilon(x-2)\right)$ est négative ; de plus, $(x-2)^2$ est positif pour tout réel x. Aussi, pour x assez proche de 2 :

$$f(x) - (x-3) \leqslant 0.$$

$$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 2, au voisinage de ce point.}}$$

4. Pour tout réel x tel que $f(x)$ soit non nul, on a :

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x.$$

Après calculs, nous obtenons :

$$\boxed{e_f(x) = \frac{x^2}{x-1} \times \frac{1}{(x-1)\ln(x-1) - x}.}$$

5. Quels que soient les réels a et h, pour peu que h soit assez proche de 0 et que les quantités suivantes existent, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{f(a)} \approx e_f(a) \times \frac{a+h-a}{a}.$$

La question posée se ramène donc au calcul de la variation v vérifiant :

$$v \approx e_f(2) \times (-3\%).$$

Étant donné que $e_f(2) = -2$, il vient :

$$v \approx 6\%.$$

$$\boxed{\text{Lorsque } x \text{ diminue de } 3\% \text{ à partir de } 2,\ f(x) \text{ subit une augmentation de } 6\% \text{ environ.}}$$

6. Utilisons la même formule que celle de la question précédente. En notant w la variation relative cherchée, nous pouvons affirmer :

$$5\% \approx e_f(2) \times w.$$

De là :

$$w \approx -2{,}5\%.$$

$$\boxed{\text{Si } x \text{ diminue de } 2{,}5\% \text{ environ à partir de } 2, \text{ alors } f(x) \text{ augmente de } 5\%.}$$