Université Paris Dauphine
DEGEAD $1^{ère}$ Année

Contrôle n°2 du 08 Janvier 2009
Michael Tolédano

# Analyse réelle et Optimisation

*La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tous les documents et calculatrices sont interdits.*
*Le barême est indicatif. Durée : 1H30*

**Exercice (8 Points)**

**I**. Soit l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \geq 0,\ x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$.
1. Donner une autre écriture de A, puis représenter graphiquement A.
2. A est-il ouvert ? fermé ? borné ? compact ? Justifier.
3. A est-il convexe ? Justifier.

**II**. Soit $f$ la fonction définie par $f(x, y) = ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ sur $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
On admet que $f$ est de classe $C^2$ sur $D_f$, et donc que ses dérivées partielles premières et secondes sont continues sur $D_f$.
On appelle fonction harmonique une fonction dont le laplacien est nul.
On appelle laplacien de $h$ la quantité $\triangle(h) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y)\ +\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y)$, $\forall(x, y) \in D_h$.

1. Montrer que $f$ est une fonction harmonique.
2. Montrer que $f$ est solution de l'équation suivante, appelée équation différentielle à dérivées partielles : $y.\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ -\ x.\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ = 0$.

**III**. Soient $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$, cinq nombres réels.
Montrer que $|a + 2b + 3c + d + e| \leq 4.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}$.
Pour quels réels a-t-on égalité ?

**Problème (12 Points)**

Soit $f$ la fonction de deux variables définie par : $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$.

1. Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Enoncer le théorème de Schwarz.
3. Calculer les dérivées partielles premières de $f$ et donner son gradient.
4. Calculer les dérivées partielles secondes de $f$ et donner sa matrice hessienne.
5. Trouver les points critiques de $f$.
6. Déterminer leur nature.
7. Quel est donc le minimum local de $f$ sur $\mathbb{R}^2$ ? Est-il global ?
8. A partir du déterminant de la matrice hessienne, déterminer si $f$ est localement convexe au voisinage de ses points critiques.
9. Quel est l'intérêt de faire le $DL$ d'une fonction ?
10. Ecrire le $DL_2(\{1, 0\})$ de $f$ en précisant soigneusement les hypothèses.
Identifier les parties approximation affine, forme quadratique et reste.
11. Donner l'équation du plan tangent $P$ à la surface S de f, au point $(1, 0, 1)$.
12. Quelle est la position relative du plan tangent $P$ par rapport à la surface S ?
13. Lorsque $x$ augmente de 1%, de combien doit varier $y$ pour que $f$ reste constante ?