

Analyse réelle et Optimisation

Tous les résultats numériques devront être simplifiés au maximum et les raisonnements très détaillés.

Devoir Maison à rendre pour le 14 Janvier (pour les volontaires)

On considère la fonction suivante à deux variables : $f(x, y) = (x + y)e^{-x} - \ln(y)$.

- 1) Donner D_f et calculer $f(D_f)$.
- 2) Qu'en déduire sur l'éventuelle existence d'un maximum ou d'un minimum global de f sur D_f ?
- 3) Pensez vous que pour autant il n'y a pas d'extremums locaux sur D_f ?
- 4) Calculer le gradient et la matrice hessienne de f après avoir prouvé que la fonction f est de classe C^2 sur D_f .
- 5) Déterminer les éventuels points critiques de f et donner leur nature.
- 6) (Difficile) En supposant désormais que l'on souhaite optimiser f non pas sur D_f en entier mais sur une sous partie de D_f , par exemple sur le pavé $[0; 3] \times [1; 2]$, quelle serait la solution de ce nouveau problème d'optimisation ?

Les questions suivantes sont indépendantes entre elles et indépendantes du début de l'exercice.

7) S'il est clair qu'un petit accroissement (aussi petit soit-il) sur x^* et/ou sur y^* va faire diminuer la valeur de f si $f(x^*, y^*)$ est un maximum, la réciproque est évidemment vraie puisque c'est la définition : un quelconque accroissement sur x^* et/ou sur y^* va faire augmenter la valeur de f si $f(x^*, y^*)$ est un minimum. En revanche, qu'en est-il d'un éventuel accroissement (h, k) à partir d'un point col (x^*, y^*) de f ?

8) Question de recherche : (5 lignes max)

A partir des notes de cours et du polycopié, expliquer la différence entre les points critiques de première et de deuxième espèce.

9) Question de recherche : (5 lignes max)

Donner l'interprétation du multiplicateur de Lagrange associé aux extremums (x^*, y^*) d'une fonction f (en mentionnant le cas où f représente la fonction d'utilité d'un consommateur).

10) Avis personnel : (5 lignes max)

Quels sont vos axes de progression en mathématiques, et comment envisagez-vous la préparation de l'examen qui aura lieu début février ?