

Analyse réelle et Optimisation

La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tous les documents et calculatrices sont interdits.

Le barème est indicatif. Durée : 1H30

Problème

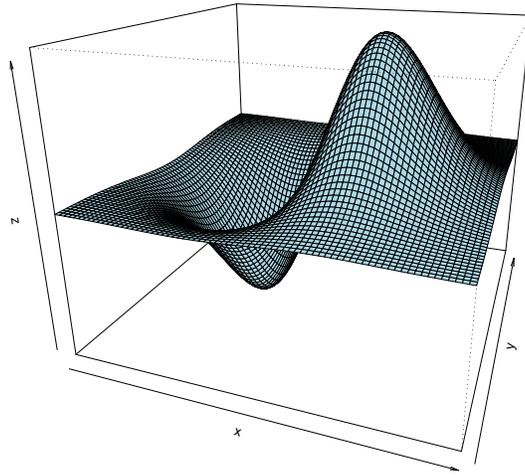
On considère la fonction f de deux variables réelles suivante : $f(x, y) = x.e^{-x^2-y^2}$ définie sur $D_f = \mathbb{R}^2$. Vous pourrez visualiser, au verso, la surface (en 3D) de la fonction avec plusieurs vues différentes.

1. [1] Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. [1] Calculer le gradient de f , noté ∇f .
3. [1,5] Énoncer le théorème de Schwarz, et calculer les dérivées secondes croisées de f .
4. [1] Calculer la matrice hessienne de f , noté $\nabla^2 f$.
5. [1] Trouver les points critiques de f sur \mathbb{R}^2 .
6. [2,5] Déterminer la nature de chacun de ces points.
7. [0,5] Déterminer le maximum et le minimum local de f sur \mathbb{R}^2 ? Sont-ils globaux ?
8. [0,5] La fonction f est-elle localement convexe au voisinage de ses points critiques ?
9. [1] Donner l'équation du plan tangent P à la surface S_f de f , au point $M(1, 2, e^{-5})$. Préciser un vecteur orthogonal à ce plan tangent.
10. [0,5] Quelle est la position relative du plan P par rapport à la surface S_f ?
11. [1,5] Écrire le $DL_2(0, 0)$ de f en précisant soigneusement les hypothèses.
12. [0,5] En déduire un équivalent de f au voisinage de l'origine.
13. [0,5] Écrire la différentielle totale de f .
14. [0,5] Pourquoi, lorsque l'on fait de l'optimisation, préfère-t-on se placer sur des ensembles ouverts ?
15. [1] On souhaite optimiser f (c'est-à-dire déterminer sa valeur maximale) sous la contrainte que les couples (x, y) appartiennent à la boule unité fermée $B_f((0; 0), 1)$. Résoudre ce problème d'optimisation. Que dire de ce problème sur l'ensemble $B_o((0; 0), 1)$?

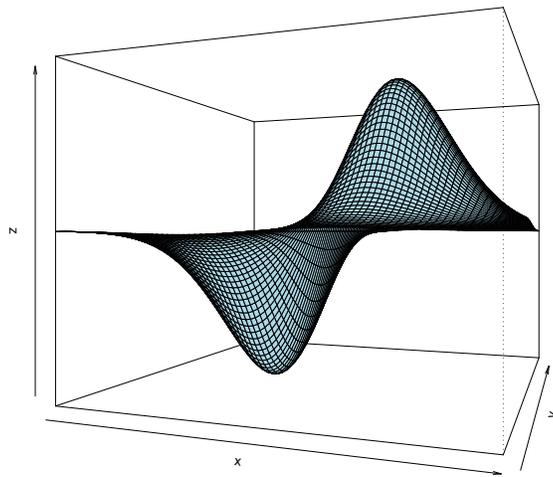
Soit la fonction $g(x, y) = x.e^{x-y}$. On considère que x et y sont les prix de deux biens X et Y , et que f et g sont les fonctions de demande de ces deux biens. On se restreint ici au domaine $\mathbb{R}_+ * \mathbb{R}_+$.

16. [1] Lorsque x augmente de 1% et que y diminue de 1%, de combien varie la demande f ?
17. [1,5] Calculer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection de S_f et S_g .
Qu'est-ce que cela signifie-t-il en terme de relation prix-demande ?
18. [1] Calculer les élasticité de f : $e_{f|x}$ et $e_{f|y}$.
19. [1] Sachant que le prix x ne varie pas, et que le prix y augmente de 5%, calculer la valeur approchée de la variation relative de la demande f .
20. [1] Ce modèle vous semble-t-il réaliste ?

vue de dessus (de près)



vue à plat (de près)



vue de dessus (de loin)

