

Analyse réelle et Optimisation

La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Documents et calculatrices interdits. Barème indicatif. Durée : 1H30

Exercice 1 : Démonstration de cours (6 Points)

Le but de l'exercice est de démontrer un théorème vu en cours dans lequel on recherche les extremums locaux d'une fonction. Pour y parvenir, on souhaite faire le développement limité d'une fonction f à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en un point $a \in \mathbb{R}$.

1. Quelle(s) hypothèse(s) doit (sont) être vérifiée(s) pour que ce développement limité soit bien défini ? Sous ce(s) condition(s) d'existence, écrire ce $DL_n(a)$.

Soit p le premier entier naturel non nul tel que $f^p(a) \neq 0$ (avec $p \leq n$ et l'on supposera que n est assez grand pour qu'un tel p existe).

2. Simplifier l'égalité établie ci-dessus en utilisant cette hypothèse.

3. En déduire un équivalent de f au voisinage de a .

4. En discutant selon la parité de p , démontrer le théorème du cours.

5. Application Numérique :

Soit $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + x - 1 - e^x \cdot \ln(x+1)$ de classe C^∞ (admis) sur $I =]-1; +\infty[$. En particulier, 0 est un point critique de f sur I . Ce point est-il un maximum local sur I ? un minimum local sur I ?

Exercice 2 (7 Points)

Un consommateur désire acheter x_1 quantité d'un bien A de prix p_1 et x_2 quantité d'un bien B de prix p_2 . Il dispose pour cela d'une richesse k et on pose $x = (x_1, x_2)$ et $p = (p_1, p_2)$.

Les quantités x_1, x_2, p_1, p_2 et k sont évidemment supposées appartenir à $\mathbb{R}^+$.

On pose $A_k = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \langle x, p \rangle \leq k\}$ et $B_k = \{(x, p) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \mid \|x\| \cdot \|p\| \leq k\}$.

1. Expliquer que l'on a $\langle x, p \rangle \leq k$. Que représente l'ensemble A_k ?

2. Donner la représentation graphique de l'ensemble A_k .

3. Montrer que A_k est compact.

4. Montrer que A_k est convexe.

5. Montrer que $B_k \subset A_k$.

6. Montrer que B_k est fermé. En déduire que B_k est compact.

Exercice 3 (7 Points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^\alpha \cdot \ln(x+1) + \alpha \cdot x}{e^x + \beta \cdot x - 1} = \frac{g(x)}{h(x)}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$.

On admettra, pour gagner du temps, que h possède une unique racine sur $\mathbb{R}$.

1. Donner D_f , domaine de définition de f , et dire s'il est convexe ou non.

2. La fonction f admet-elle un développement limité d'ordre 1 au point 0 ?

3. Les fonctions g et h admettent-elles un développement limité d'ordre 1 au point 0 ?

4. S'ils existent, calculer les $DL_1(0)$ des fonctions g et h .

5. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

6. Comment expliquer que la limite de f lorsque x tend vers 0 soit finie alors que f n'est pourtant pas continue en 0 ?

7. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + 2x - 1}{x^4 \cdot \ln(x+1) + 4x} \right)$.