Correction du Devoir Maison

$f(x,y) = (x+y)e^{-x} - \ln(y)$

① En présence de la fonction logarithme on a évidemment $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Quel est l'espace d'arrivée de la fonction f ?
Autrement dit, f balaye-t-elle toutes les valeurs de $\mathbb{R}$?
Réponse affirmative : $f(D_f) = \mathbb{R}$ puisque par exemple :

$$f(0,y) = y - \ln(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f(x,1) = (x+1)e^{-x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

remarque : chaque valeur de $\mathbb{R}$ aura donc au moins un antécédent par f, on dit que f est surjective de D_f dans $\mathbb{R}$.

② On en déduit immédiatement que f ne possède ni de minimum global sur D_f, ni de maximum global sur D_f, puisqu'elle peut prendre des valeurs infinies (limites).

③ Il n'y a en revanche absolument rien qui n'empêche f de posséder des extremums locaux ! C'est juste qu'ils ne seront pas globaux.

④. La fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est polynômiale sur $\mathbb{R}^2$ et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent de classe C^2 sur D_f.
- La fonction exponentielle et son inverse sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et leur extension à deux variables l'est du coup, sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur D_f.
- Même argument pour la fonction logarithme.

Les opérations algébriques de fonctions de classe C^2 sur D_f conservent le fait que f est de classe C^2 sur D_f.

Par conséquent, son gradient et sa matrice hessienne sont bien définis sur D_f convexe et on a, $\forall (x,y) \in D_f$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (1-x-y)e^{-x} \\ e^{-x} - \frac{1}{y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} (x+y-2)e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-x} & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

⑤ Résolvons le système formé par l'égalité $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} (1-x-y)e^{-x} = 0 \\ e^{-x} - \frac{1}{y} = 0 \end{cases}$$

Que l'étude porte sur la 1ère ou la 2ème ligne, cela revient exactement au même.
Prenons par exemple la 2ème ligne et procédons par substitution.