$e^{-x} - \frac{1}{y} = 0 \iff \frac{1}{y} = e^{-x} \iff y = e^{x}$.

Cette égalité, injectée dans la 1ère ligne du système, donne :

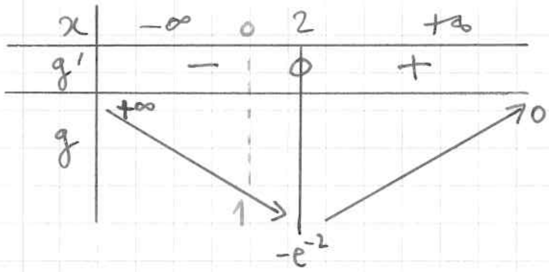
$(1-x-e^{x})e^{-x} = 0$, autrement : $(1-x)e^{-x} = 1$.

Observons que $x=0$ est solution "évidente" de cette dernière égalité, mais rien ne garantit que c'est la seule.

Etudions la fonction $g(x) = (1-x)e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

g est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$:

$g'(x) = (x-2)e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. D'où le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:



Le théorème des valeurs intermédiaires prouve ici que seul $x=0$ est la solution cherchée.

Pour $x=0$, $y = e^{0} = 1$.

En conclusion, le seul point critique de f sur D_f est le point $A(0,1)$.

Déterminons la nature du point A :

$\nabla^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\nabla^2 f(0,1)) = -1-1 = -2 < 0$

Donc le point A est un point col.

(6) Cette question est délicate mais intéressante. On cherche à optimiser f sur un ensemble fermé (et même sur un compact car $[0,3]\times[1,2]$ est compact).

Nous avons déjà montré que f ne possède pas d'extremum local car le seul point critique est un point col.

En conclusion, f va atteindre ses valeurs optimales sur les bords de l'ensemble fermé sur lequel on cherche à l'optimiser.

Comparons les valeurs que f prend en ses quatres bords :