1er bord : $x = 0$, $y \in [1;2]$. $f(0,y) = y - \ln(y)$
2e bord : $x = 3$, $y \in [1;2]$. $f(3,y) = (y+3)e^{-3} - \ln(y)$
3e bord : $x \in [0;3]$, $y = 1$. $f(x,1) = (x+1)e^{-x}$
4e bord : $x \in [0;3]$, $y = 2$. $f(x,2) = (x+2)e^{-x} - \ln(2)$

La valeur maximale de f sur le compact $[0;3] \times [1;2]$ est $2 - \ln(2)$, et elle est atteinte au point $(0;2)$.

Nous sommes certains qu'à l'intérieur du pavé, f ne prend pas de plus grande valeur, donc il fallait lire la valeur de f sur les bords de l'ensemble sur lequel on nous demandait d'effectuer l'optimisation.

(7) En référence à la définition :

- d'un maximum (x^*, y^*) : $f(x^*,y^*) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D_f$
  alors un accroissement sur x^* et y^* va diminuer la valeur de f :
  $f(x^*+h, y^*+k) \leq f(x^*,y^*)$ quels que soient h et k.

- c'est l'inverse pour un minimum

- en revanche les deux cas se produisent en présence d'un point col (x^*,y^*) : tout dépend de la direction (h,k) dans laquelle vous vous dirigez.
  Imaginez une selle de cheval, mon exemple préféré...
  Placez-vous au point col : si vous allez à gauche ou à droite de ce point col, la valeur de f diminue, et elle augmente si vous avancez ou reculez.

  C'est aussi la raison pour laquelle le plan tangent est tantôt situé au-dessus et en-dessous de la surface de f lorsque l'on est en présence d'un point col (déterminant de la matrice hessienne négatif).

(8) On dit qu'un point critique de 2ème espèce ne qualifie pas la contrainte, dans le sens où ils ont la particularité d'être aussi des points critiques pour la fonction g associée à la contrainte. Le système d'équations permettant de les obtenir ne prend d'ailleurs pas en compte la fonction f à optimiser ! Ils sont donc particulier dans le sens où ils peuvent optimiser f et g en même temps. Ceci n'est pas valable pour ceux de 1ère espèce.

(9) Supposons qu'une fonction f atteigne son maximum en (x^*,y^*), la valeur optimale est donc $f(x^*,y^*)$ sous la contrainte $g(x,y) = m$ (un réel), associée au multiplicateur de Lagrange λ^*. L'idée est que lorsque la contrainte augmente d'une unité (passage de m à $m+1$) alors λ^* donne une bonne estimation de la variation que cela impliquera sur la variation que va subir $f(x^*,y^*)$.

exemple : $\text{Max } f(x,y) = 2x^2 + y$
SC : $x - y = 10$

Pas de point critique de 2ème espèce, mais il y en a un de 1ère espèce : $(x^*,y^*) = (-1,-11)$ associé à $\lambda^* = -1$
La valeur de l'optimum vaut $f(x^*,y^*) = f(-1,-11) = -10{,}5$.
Si m passe de 10 à 11 la contrainte devient : $x - y = 11$. L'effet va être que l'optimum $f(x^*,y^*)$ va baisser d'une unité (puisque $\lambda^* = -1$) !
Vérification en résolvant le nouveau problème d'optimisation.
On obtient $(\bar{x},\bar{y}) = (-1,-12)$ comme solution, d'où la nouvelle valeur optimale $f(-1,-12) = -11{,}5$.

Ainsi λ^* représente bien l'effet, sur la valeur optimale $f(x^*,y^*)$, d'une modification d'une unité de la valeur de m (effet "marginal").