Analyse réelle et Optimisation

La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Documents et calculatrices interdits. Barème indicatif. Durée : 1H30

Exercice 1 : Application du cours (5 Points)

1. Énoncer la formule de Taylor d'une fonction f à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) en précisant les hypothèses utilisées.
2. Quelle différence fondamentale y a-t-il entre optimiser une fonction sur un intervalle fermé et optimiser une fonction sur un intervalle ouvert ?
3. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a vu que l'application $N(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ est une norme car elle vérifie les trois propriétés du cours. D'ailleurs, c'est elle que l'on appelle "norme euclidienne", la plus connue permettant de calculer la distance entre deux points du plan. Mais il en existe une infinité. Montrer que $N^*(x) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$ est aussi une norme.
4. Montrer que l'ensemble $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N^*(x) \leq 1\}$ est compact. Quelle est sa forme géométrique ?

Exercice 2 (5 Points)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{x^3}{x - e^x + \ln(1-x) + \frac{1}{1-x}}$ (Indication: Effectuer un DL₃(0) du dénominateur)

Exercice 3 (10 Points)

La fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}{\sigma \cdot \left(1 + e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right)^2}$ est une densité de probabilité, ce qui signifie que c'est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. f s'appelle la loi logistique, de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. En 1956, le géophysicien Hubbert a utilisé cette fonction pour modéliser le volume de production de pétrole aux USA. Si x est l'année, $f(x)$ est la proportion produite. Il pose $f(x) = \frac{e^{-x+1970}}{(1 + e^{-x+1970})^2}$.

1. Afin de vérifier que f est bien une densité de probabilité :

(i). Montrer que f est positive et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(ii). Montrer que $F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x+1970}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(Bonus). Conclure en montrant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

2. Montrer que $f'(x) = \frac{(-1 + e^{-x+1970}) \cdot e^{-x+1970}}{(1 + e^{-x+1970})^3}$ et en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

En quelle année Hubbert a-t-il prévu que la production serait la plus forte ?

3. Après les années 2000 on a vu que la production était décroissante dû à l'épuisement progressif du pétrole. Dans combien d'année la production ne représentera-t-elle plus que 5% de ce qu'elle est aujourd'hui en 2011 ?

(On donnera une valeur approchée de la variation relative en utilisant l'approximation : $-0,95 \cdot \frac{f(2011)}{f'(2011)} \approx 3$.)

4. En tant que primitive de f , F représente la production cumulée de pétrole à travers le temps. Donc $F(x)$ est la production totale de pétrole aux USA jusqu'à l'année x . Montrer qu'Hubbert pense qu'un jour ou l'autre il n'y aura plus de pétrole à exploiter dans le pays.

5. La production cumulée F est croissante et augmente donc chaque année. A-t-il fallu attendre longtemps pour qu'à partir de 1970 (donc avant le choc pétrolier), la production augmente de 50% ? La réponse prouve à quel point on a pu tirer profit de cette énergie pendant cette décennie...

6. On souhaite estimer la production cumulée au milieu de l'année 1971 :

(i). Effectuer le développement limité de F à l'ordre 2 en 1970.

(ii). Estimer ensuite $F(1971, 5)$. Combien restera-t-il de pétrole après le 1^{er} Juillet 1971 ?

(iii). Au vu de cette étude, le modèle de Hubbert vous semble-t-il réaliste ? Justifier.