

Analyse réelle et Optimisation

La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tous les documents et calculatrices sont interdits.

Le barème est indicatif. Durée : 1H30

Problème (20 Points)

On considère la fonction f de deux variables réelles suivante : $f(x, y) = (x + y) \cdot \ln(x^2 + y^2)$. En posant $f(0, 0) = 0$, f est continue en $(0, 0)$ mais on ne le démontrera pas. On a donc $D_f = \mathbb{R}^2$. En revanche, f n'est ni de classe C^1 ni de classe C^2 en ce point. Vous pourrez visualiser, au verso, la surface représentative de f dans $\mathbb{R}^3$.

1. [1,5] Montrer que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est de classe C^2 .
2. [0,5] En considérant par exemple $f(x, 0)$, que conclure sur l'existence d'éventuels extremas globaux de f sur $\mathbb{R}^2$?
3. [1] Calculer le gradient de f , noté ∇f .
4. [2] Énoncer le théorème de Schwarz, et calculer les deux dérivées secondes croisées de f .
5. [2] Calculer la matrice hessienne de f , notée $\nabla^2 f$.
6. [2,5] Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
7. [2] Déterminer la nature de chacun de ces points.
8. [0,5] Déterminer le maximum et le minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$.
9. [1,5] La fonction f est-elle localement convexe au voisinage de ses points critiques ?
10. [2] Montrer que f admet un $DL_2(0, 1)$. Déterminer ce développement limité en précisant soigneusement les hypothèses. Quelle est la position relative au voisinage du point $(0, 1)$, du plan tangent P à la surface S_f au point $(0, 1)$, par rapport à S_f ?
11. [1] Déterminer l'expression de la courbe de niveau 0 de f .
12. [1] Montrer que $f(-x, -y) = -f(x, y)$. Alors la fonction f est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?
13. [1,5] Calculer $e_{f|x}(x, y)$ et $e_{f|y}(x, y)$. Quelle serait la variation relative de f si le couple (x, y) variait de respectivement $(+1\%, -2\%)$ à partir du point $(2, 1)$?
14. [0,5] Quelle différence fondamentale y a-t-il entre optimiser une fonction sur un intervalle fermé et optimiser une fonction sur un intervalle ouvert ?
15. [0,5] Nous avons vu en cours qu'il était important que le domaine de définition des fonctions à deux variables soit un ensemble convexe. Réexpliquer pourquoi.

Vue sur $[-1;1] \times [-1;1]$

