Correction du 1er Contrôle :

EX 1

① Soit f une fonction de classe C^n sur D_f ouvert de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_0 \in D_f$.
Alors f admet un $DL_n(x_0)$.
Soit ε une fonction définie et continue au $V(0)$ telle que $\varepsilon(0)=0$. Alors $\forall x \in D_f$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0).(x-x_0)^k}{k!} + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

② Optimiser une fonction sur un intervalle fermé ne permet pas de garantir l'existence de points critiques (pour lesquels la dérivée s'annule).
On trouverait alors des extremas qui sont des extremas uniquement parce que l'intervalle d'étude est fermé, sans vérifier les propriétés qu'ont les extremas d'une fonction.

Par exemple : $f(x) = x^2$ sur $[1,2]$ possède $f(2) = 4$ comme maximum.
Sur $]1,2[$ f ne possède plus de maximum car f' ne s'annule pas sur $]1,2[$.

③ $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $N^*(x) = \max_{i \in \{1..n\}} |x_i|$. Cette quantité est positive et on a :

- A t'on : $N^*(x) = 0 \iff x = 0$?
  oui puisque $x=0 \iff x=(0,0,\dots,0)$ donc $\max |x_i| = 0$ et réciproquement si $N^*(x)=0$ alors tous les $|x_i|$ sont nuls et donc $x_i = 0$ $\forall i \in \{1\dots n\}$ soit $x=0$.

- A t'on : $N^*(\lambda x) = |\lambda|.N^*(x)$?
  oui puisque $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $N^*(\lambda x) = \max_{i \in \{1..n\}} |\lambda x_i| = |\lambda|. \max_{i \in \{1..n\}} |x_i| = |\lambda|.N^*(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

- A t'on : $N^*(x+y) \leq N(x) + N(y)$?
  oui puisque $|a+b| \leq |a|+|b|$ d'après les propriétés de la valeur absolue, soit :
  $\max_{i \in \{1..n\}} |x_i + y_i| \leq \max_{i \in \{1..n\}} |x_i| + \max_{i \in \{1..n\}} |y_i|$.

④ soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors si $x \in I$, on a $N^*(x) = \max(|x_1|,|x_2|) \leq 1$, d'où à la fois $|x_1| \leq 1$ et $|x_2| \leq 1$. Donc $x_1 \in [-1,1]$ et $x_2 \in [-1,1]$ (en notant I l'ensemble proposé en énoncé).
Donc I est le pavé $[-1,1]^2$ qui est compact.