

EX2 Il est légitime de vouloir effectuer un $DL_3(0)$ au dénominateur puisque sinon la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ " apparaîtrait.

$$\text{Soit } g(x) = x - e^x + \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-\infty, 1[= I$$

g est la somme de fonctions C^∞ sur I , et donc, est de classe C^∞ sur I .
Donc g admet un $DL_3(0)$ que nous allons établir.

Soit ε une fonction définie et continue au $V(0)$ telle que $\varepsilon(0) = 0$. Alors $\forall x \in I$;

$$g(x) = g(0) + (x-0)g'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}g''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}g'''(0) + (x-0)^3\varepsilon(x-0)$$

avec: $g'(x) = 1 - e^x - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$ soit $g'(0) = 0$

$$g''(x) = -e^x - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3}$$
 soit $g''(0) = 0$

$$g'''(x) = -e^x - \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{6}{(1-x)^4}$$
 soit $g'''(0) = 3$. De plus $g(0) = 0$.

Finalement: $g(x) = \frac{x^3}{6} \cdot 3 + x^3\varepsilon(x) = \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

D'où: $f(x) = \frac{x^3}{g(x)} = \frac{x^3}{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{2}$

puisque ε est continue et nulle, en 0.

EX3

① i). Un carré et une exponentielle étant toujours positifs sur $\mathbb{R}$, f est positive sur $\mathbb{R}$.

• $x \mapsto e^{-x+1970}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, tout comme $x \mapsto (1+e^{-x+1970})^2$. Comme le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

ii) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-(1+e^{-x+1970})'}{(1+e^{-x+1970})^2} = -f(x)$.

iii) $\int_{-t}^t f(x) dx = [F(x)]_{-t}^t = \frac{1}{1+e^{-t+1970}} - \frac{1}{1+e^{-(-t)+1970}}$.

 $\downarrow \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$
 $\downarrow \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
 Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx = 1$.

Donc f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.