Université Paris Dauphine
DEGEAD $1^{ère}$ Année

Contrôle n°1 du 16 Novembre 2012
Michaël Tolédano

Analyse réelle et Optimisation

La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tous les documents et calculatrices sont interdits.
Le barème est indicatif. Durée : 1H30

Exercice 1 (5 Points)

Soit f la fonction définie sur son domaine de définition D_f par : $f(x) = \dfrac{e^{x^2-1} - 2x + 1}{x - 3 + \ln(x) + 2e^{1-x}} = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Pour cela, on effectuera un $\mathrm{DL}_2(1)$ du numérateur g et du dénominateur h.

Exercice 2 (8 Points)

1. Expliciter et représenter l'ensemble suivant :
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 > 0 \text{ ou } x^2 + y^2 < 1\}$.

2. Montrer que l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ est convexe.
Attention, il y a une première méthode intuitive et rédactionnelle, et une méthode calculatoire assez longue...

3. La fonction $N(x,y) = |x+y|$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

4. Déterminer C_1, l'ensemble de niveau 1 de la fonction g définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \text{ x } \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$.
Est-ce un ensemble compact ?

Exercice 3 (7 Points)

Dans cet exercice, on pourra être amené à utiliser les opérations suivantes :
$2 \cdot 1,68^2 - 1 = 4,64$, $\frac{1,68}{2 \cdot 1,68^2 - 1} = 0,36$ *et* $\frac{2,04}{1,68} = 1,21$.

Soit $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ la fonction de production d'un bien X d'une entreprise, en fonction du temps de travail investi $x > 0$ en jours.

1. Calculer la fonction marginale de f ainsi que son élasticité.

2. A supposé qu'un salarié travaille $x_0 = 1$ jour, quelle serait la variation relative de sa production en travaillant 10% de plus ?

3. Aux arrondis près, en travaillant $x_0 = 1,68$ on obtient une production $f(x_0) = 10$. Ce faisant, le chef de cette entreprise souhaiterait doubler sa production. A quelle variation sur le temps de travail doit-il procéder en conséquence ?

4. Supposons que n employés de l'entreprise aient travaillé $x_1, \cdots, x_n$ jours, générant ainsi des productions personnelles $f(x_1), \cdots, f(x_n)$ et des profits journaliers en euros $p_1, \cdots, p_n$. Exprimer le profit total K et majorer ce profit (à l'aide de normes) par une quantité que l'on nommera K^*. Quand peut-on atteindre ce profit ($K = K^*$) ?

5. On pose $K^{**} = n.N(x).N(p)$ où $N(t) = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} t_i$. Montrer que $K^* \leq K^{**}$.