Université Paris Dauphine
DEGEAD $1^{ère}$ Année

Contrôle n°2 du 11 Janvier 2013
Michaël Tolédano

Analyse réelle et Optimisation

La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tous les documents et calculatrices sont interdits.
Le barême est indicatif. Durée : 1H30

Problème (20 Points)

On considère la fonction f de deux variables réelles : $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + e^{-xy}$ définie sur $D_f = \mathbb{R}^*\text{x}\mathbb{R}$.

1. **[1,5]** Montrer que f est de classe C^2 sur D_f.
2. **[1]** Calculer le gradient de f, noté ∇f.
3. **[2]** Calculer la matrice hessienne de f, notée $\nabla^2 f$.
4. **[0,5]** Quelles sont les fonctions h qui vérifient $h''_{xy} = h''_{yx}$ sur leur domaine de définition ?
5. **[0,5]** Montrer que f est solution de l'équation suivante (appelée équation différentielle aux dérivées partielles) $\forall (x,y) \in D_f$:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \; - \; \dfrac{y}{x}.\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \; = \dfrac{-2y}{x^2}$
6. **[1]** En considérant par exemple $f(x,1) = g(x)$, calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$. Que conclure sur l'existence d'éventuels extremas globaux de f sur D_f ? Pour autant, peut-on en déduire une quelconque information sur l'éventuelle existence d'extremas locaux de f sur son domaine de définition ?
7. **[0,5]** Expliquer pourquoi faut-il chercher à optimiser f respectivement sur $A = \mathbb{R}^*_-\text{x}\mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}^*_+\text{x}\mathbb{R}$ plutôt que sur D_f directement.
8. **[2]** Déterminer les points critiques de f sur D_f.
9. **[1]** Déterminer alors la nature de chacun des points critiques de f.
10. **[0,5]** Conclure sur les potentielles existences et valeurs des extremas locaux de f sur A et B.
11. **[1,5]** La fonction f est-elle convexe : *(i)* sur D_f ? *(ii)* Sur A et sur B ? *(iii)* Est-elle localement convexe au voisinage de ses points critiques ?
12. **[2,5]** Montrer que f admet un $DL_2((1,1))$. Déterminer ce développement limité en précisant soigneusement les hypothèses. Quelle est la position relative au voisinage du point $(1,1)$, du plan tangent P à la surface S_f au point $(1,1)$, par rapport à S_f ? Vous préciserez l'équation de ce plan.
On utilisera le fait que $2e + 1 - e^2 < 0$.
13. **[2]** Montrer que $e_{f|x}(1,1) = -1$ et que $e_{f|y}(1,1) = \frac{e-1}{e+1}$. Quelle doit être la variation sur y pour que, à partir du point $(1,1)$ et d'une hausse de 5% sur x, f reste constante ?
On donnera une valeur approchée, et on utilisera l'arrondi $\frac{e+1}{e-1} \approx 2,16$.
14. **[1]** On pose $h(x,y) = f(x,y) - \dfrac{y}{x}$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer C_1, la courbe de niveau 1, de h. Sans justifier, dire s'il est convexe ou non.
15. **[2,5]** On cherche à optimiser h sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$. Sans chercher à résoudre le problème, trouvez-en les points candidats à la solution. Si vous avez le temps, aller le plus loins possible dans la résolution du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité puis d'inégalité.