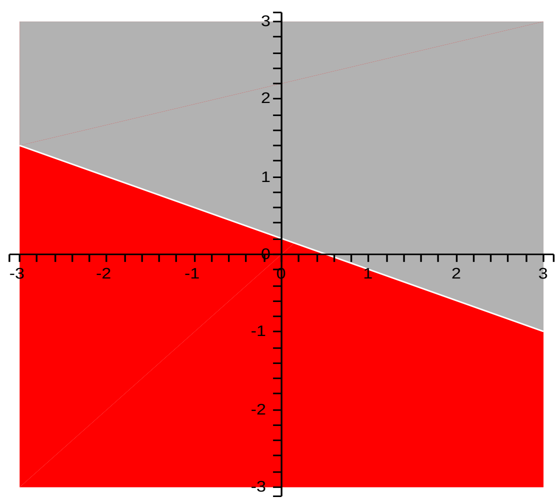
Correction du CC2-Degead 1

<u>Maths</u>

<u>Exercice I.</u> Voir cours.

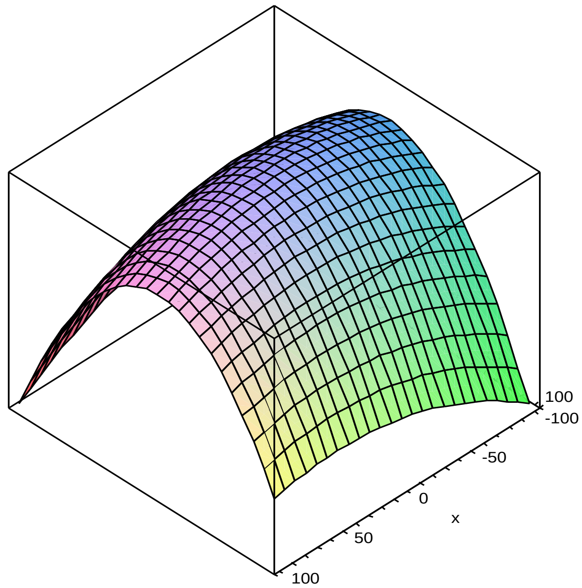
<u>Exercice II.</u>

(1) On a $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 - 2x - 5y > 0\}$. C'est un demi-plan ouvert (en rouge sur la figure ci-dessous). C'est aussi un convexe.



La fonction $(x,y) \mapsto 1 - 2x - 5y$ est affine et la fonction $u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln u$ est concave, donc la composée est concave (cours).

(2) La fonction g est un polynôme de degré 2. On a donc $D_g = \mathbb{R}^2$. De plus, pour étudier la convexité, il suffit de calculer son déterminant (cours). On a $4ac - b^2 = 19 > 0$ et $a < 0$. Donc g est concave (voir figure ci-dessous)



Exercice III.

(1) On a $D_f = \mathbb{R}^2$. La fonction $(x,y) \mapsto (x+y-2)^2$ est C^2 sur D_f car c'est un polynôme. De plus, $(x,y) \mapsto x^2 - 2y^2 - xy$ est un polynôme, donc est de classe C^2, et la fonction $u \in \mathbb{R} \mapsto e^u$ est C^2 sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de composition, on en déduit que

$$(x,y) \mapsto \exp\left(x^2 - 2y^2 - xy\right)$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Par suite f est également C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) On a

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + 2y - 4 + (2x-y)e^{x^2-2y^2-yx}\,;\, 2x + 2y - 4 + (-4y-x)e^{x^2-2y^2-yx}\right)$$

et

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \left(2 + (2x-y)^2\right)e^{x^2-2y^2-yx} & 2 - \left((4y+x)(2x-y)+1\right)e^{x^2-2y^2-yx} \\ 2 - \left((4y+x)(2x-y)+1\right)e^{x^2-2y^2-yx} & 2 + \left((4y+x)^2 - 4\right)e^{x^2-2y^2-yx} \end{pmatrix}.$$

(3) En $(2,1)$, on a

$$f(2,1) = 2, \quad \nabla f(2,1) = (5,-4), \quad \mathrm{Hess}_f(2,1) = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 34 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le DL à l'ordre 2 de f au point $(2,1)$:

$$f(2+h, 1+k) = 2 + 5h - 4k + \frac{13}{2}h^2 - 17hk + 17k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)$$

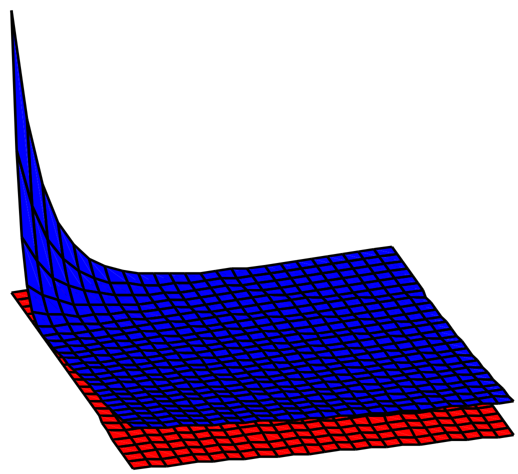
où ϵ est une fonction satisfaisant

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0.$$

(4) Au point $(2,1)$ l'équation du plan tangent est donnée par

$$z = 2 + 5(x-2) - 4(y-1) = 5x - 4y - 4.$$

Pour déterminer la position du graphe par rapport à la tangente au voisinage du point $(2,1)$, on clacule $rt - s^2 = 13 \times 34 - 17^2 = 153 > 0$. De plus $r = 13 > 0$ donc le graphe (en bleu ci-dessous) est situé au-dessus du plan tangent (en rouge).



(5) Au point $(0,0)$ on a

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En ce point on a $rt - s^2 < 0$ donc f n'est ni convexe ni concave.

(6) On calcule les élasticités partielles

$$e_{f/x}(2,1) = 5 \quad \text{et} \quad e_{f/y}(2,1) = -2.$$

On a donc l'approximation suivante au ponit $(2,1)$

$$\frac{\triangle f}{f} \simeq 5\frac{\triangle x}{x} - 2\frac{\triangle y}{y}.$$

On obtient donc

$$\frac{\triangle y}{y} = 10\%.$$

(7) L'approximation affine de f est donnée par

$$\hat{f}_{2,1}(h,k) = 2 + 5h - 4k,$$

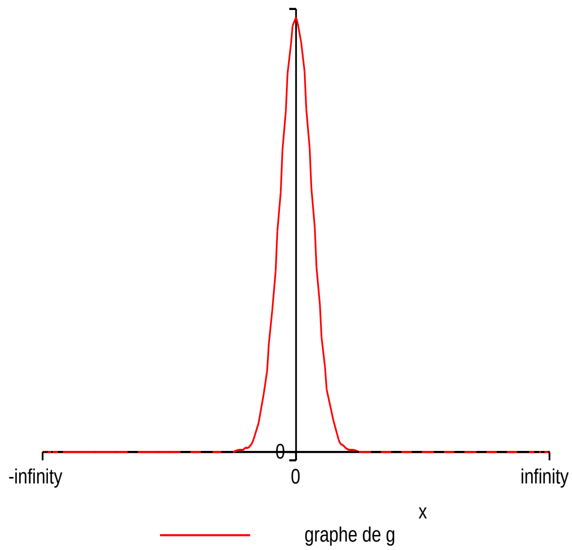
d'où

$$f(1,9;1,2) \simeq 2 + 5 \times (-0,1) - 4 \times 0,2 = 0,7.$$

(8) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et, de plus

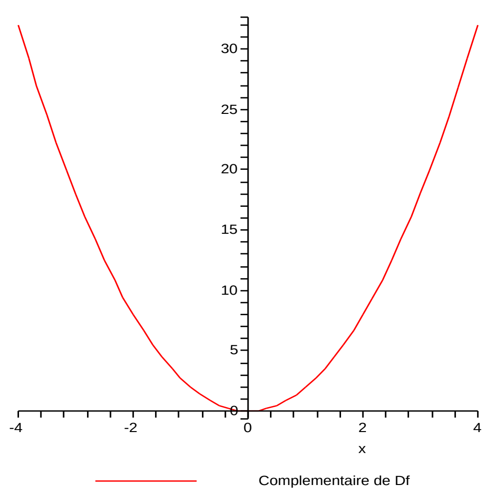
$$g(x) = e^{-2x^2}.$$

La dérivée vaut $g'(x) = -4xe^{-2x^2}$. Il y a donc un unique point critique en 0. De plus, g est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. C'est donc un maximum global.



Exercice IV.

(1) On a $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 2x^2\}$.

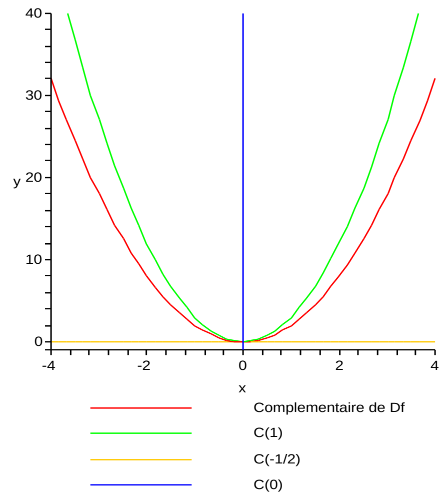


D_f n'est pas convexe. Par exemple, les points $A = (0,1)$ et $B = (0,-1)$ sont dans D_f. Or le milieu du segment $[AB]$, c'est-à-dire le point $(0,0)$, n'est pas dans D_f. Finalement, f est une fraction rationnelle, donc de classe C^2 sur D_f.

(2) Les courbes de niveau sont respectivement données par

$$C_1 = \{(x,y) \in D_f ; y = 3x^2\} \quad C_{-1/2} \quad = \{(x,y) \in D_f ; y = 0\} \quad C_0 = \{(x,y) \in D_f ; x = 0\}$$

d'où le dessin



(3) On a

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{2x}{y-2x^2} + \frac{4x^3}{(y-2x^2)^2} ; -\frac{x^2}{(y-2x^2)^2}\Big)$$

pour tout point de D_f.

(4) Avec ce qui précède, on obtient

$$f(1,1) = -1, \quad \nabla f(1,1) = (2,-1)$$

donc

$$f(1+h, 1+k) = -1 + 2h - k + \sqrt{h^2+k^2} \times \epsilon(h,k)$$

où ϵ est une fonction satisfaisant

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0.$$

On en déduit l'approximation

$$f(0,9;1,1) \simeq -1 + 2 \times (-0,1) - 0,1 = -1,3.$$