Université Paris-Dauphine **Année** 2012-2013
UFR DEGEAD 1$^{\text{er}}$ **cycle**

UE 13 : SOUTIEN – SEMAINE DU 29 OCTOBRE AU 4 NOVEMBRE

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (-1\,;2\,;1)$ et $B = (3\,;2\,;-2)$.

1. Donner deux vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$.

2. Donner une équation de la sphère de diamètre $[AB]$.

Exercice 2

Pour tout réel x, on pose $g(x) = e^{x-x^2}$.
On note C_g la représentation graphique de la fonction g dans le plan usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Donner le développement limité de g en 0 à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à C_g au point $(0\,;1)$ ainsi que la position de C_g par rapport à cette tangente, au voisinage de ce point.

3. Établir que g'' s'annule en deux réels x_1 et x_2 dont on précisera les valeurs.

Exercice 3

Soit f la fonction de la variable réelle définie par l'expression $f(x) = \ln(x+1) + e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera I.

2.a. Expliquer soigneusement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I.

2.b. Donner l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

3.a. On note φ l'application définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - x - 1$.
Montrer que φ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle ne s'annule qu'en 0.

3.b. En déduire qu'il existe un unique réel x_0 de I tel que $f'(x_0) = 0$.
La fonction f admet-elle un extremum au point d'abscisse x_0 ?

3.c. Quel est le sens de variation de f sur I ?

4.a. Écrire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

4.b. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A(0\,;1)$.
Préciser la position relative de $\mathcal{T}$ par rapport à $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point A.

Exercice 4

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Les trois équations ci-dessous représentent des équations de cercle ; pour chaque cercle dont il est question, préciser son rayon et les coordonnées de son centre.

$$3 - x^2 - 2x - y^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0 \qquad x^2 + y^2 = y$$

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $A = (1\,;2)$ et $B = (3\,;1)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

2. Écrire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

3. Expliquer pourquoi les résultats des deux questions précédentes sont identiques.

Exercice 6

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Vérifier que $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 - 2x = 4$ sont les équations respectives de deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, dont on précisera le centre et le rayon.

2. Déterminer les points d'intersection éventuels des deux cercles.

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;-2)$ et $\vec{v} = (-1\,;0)$ ainsi que le point $A = (4\,;-1)$.

1. Calculer $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2. Donner une équation cartésienne de la droite D_1 passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

3. Donner une équation cartésienne de la droite D_2 passant par A et de vecteur normal $\vec{v}$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $C = (3\,;-3\,;-2)$ et $D = (1\,;1\,;0)$.

1. On note I le milieu du segment $[CD]$; quelles sont les coordonnées de I ?

2. Donner une équation cartésienne du plan passant par I et admettant le vecteur $\overrightarrow{CD}$ comme vecteur normal.

3. Montrer que le plan déterminé à la question précédente est aussi l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $CM = DM$.

Exercice 9

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Donner une équation cartésienne du cercle de centre $(1\,;0)$ passant par le point $(4\,;4)$.

Exercice 10

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit (P) le plan d'équation $-2x - y + 2z + 1 = 0$. Soit (Q) le plan passant par les points $(1\,;0\,;2)$, $(3\,;0\,;0)$ et $(4\,;1\,;-1)$.

1. Donner un vecteur normal à (P), puis un vecteur normal à (Q).

2. Montrer que les vecteurs trouvés à la question précédente sont orthogonaux.

Université Paris-Dauphine
UFR DEGEAD 1^er^ **cycle** **Année** 2012-2013

CORRECTION

Exercice 1

1. Les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ sont les triplets de réels $(x\,;y\,;z)$ vérifiant :

$$(x\,;y\,;z)\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

Étant donné que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à $(4\,;0\,;-3)$, la question posée revient à déterminer deux éléments $(x\,;y\,;z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $4x-3z=0$.

On remarque par exemple que $(3\,;0\,;4)$ et $(-3\,;7\,;-4)$ conviennent.

$$\boxed{\text{Les vecteurs } (3\,;0\,;4) \text{ et } (-3\,;7\,;-4) \text{ sont orthogonaux à } \overrightarrow{AB}.}$$

2. Comme $[AB]$ est un diamètre de la sphère, on peut affirmer que le centre de la sphère est le milieu I de $[AB]$. On sait :

$$I=\frac{A+B}{2}.$$

Quelques calculs nous permettent alors d'affirmer :

$$I=\left(1\,;2\,;\frac{-1}{2}\right).$$

Le rayon de la sphère vaut $\dfrac{AB}{2}$, or nous savons :

$$AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(2-2)^2+(-2-1)^2},$$

c'est-à-dire :

$$AB=5.$$

Le rayon de la sphère est donc de $\dfrac{5}{2}$.

$$\boxed{\text{Une équation de la sphère en question est donc } (x-1)^2+(y-2)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2.}$$

Exercice 2

1. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction usuelle. La fonction $x\mapsto x-x^2$ est polynomiale : elle est donc également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour tout réel x, le développement limité demandé est :

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

Or, pour tout élément x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = (1-2x)e^{x-x^2} \quad \text{et} \quad g''(x) = (4x^2-4x-1)e^{x-x^2}.$$

Il existe donc une fonction ε qui vérifie, pour tout réel x :

$$\boxed{g(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

À partir du développement limité précédent, on peut affirmer :

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = 1 + x \text{ est tangente à } C_g \text{ au point } (0\,;1).}$$

De plus, si x est assez proche de 0, il est possible d'écrire :

$$g(x) - (1+x) \approx -\frac{x^2}{2}.$$

Par suite, étant donné que $-\dfrac{x^2}{2}$ est négatif pour tout réel x :

$$\boxed{\text{la courbe } C_g \text{ est en dessous de sa tangente au point } (0\,;1)\text{, si l'on reste près de ce point.}}$$

3. L'expression de g'' a été calculée à la question précédente. Nous pouvons donc écrire, quel que soit le réel x :

$$g''(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Le trinôme $4x^2 - 4x - 1$ possède un discriminant Δ égal à 32 : il existe donc deux réels x_1 et x_2 qui annulent $4x^2 - 4x - 1$. Plus précisément, nous avons :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{\Delta}}{8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{\Delta}}{8}.$$

En remarquant que $\sqrt{\Delta}$ vaut $4\sqrt{2}$, nous pouvons simplifier les résultats précédents :

$$\boxed{x_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.}$$

Exercice 3

La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.

Exercice 4

Pour tout $(x\,;y\,;z)$ de $\mathbb{R}^3$ et en notant (E) l'équation $3 - x^2 - 2x - y^2 = 0$, nous avons les équivalences successives suivantes :

$$(E) \Longleftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0.$$

$$(E) \Longleftrightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0.$$

$$(E) \Longleftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2^2.$$

$$\boxed{\text{L'équation représente le cercle de centre } (-1\,;0) \text{ et de rayon 2.}}$$

De la même façon, si x, y et z sont trois réels quelconques et que (F) représente l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$, alors nous avons :

$$(F) \iff x^2 - 4x + y^2 + 2y + 4 = 0.$$

$$(F) \iff (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 4 = 0.$$

$$(F) \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1^2.$$

$$\boxed{\text{L'équation représente le cercle de centre } (2\,;-1) \text{ et de rayon } 1.}$$

Enfin, quel que soit le triplet $(x\,;y\,;z)$ de $\mathbb{R}^3$ et en notant (G) l'équation $x^2 + y^2 = y$:

$$(G) \iff x^2 + y^2 - y = 0.$$

$$(G) \iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

$$(G) \iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\boxed{\text{L'équation représente le cercle de centre } \left(0\,;\frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{1}{2}.}$$

Exercice 5

1. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

En explicitant les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$, il vient :

$$\mathcal{C} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1\,;y-2) \cdot (x-3\,;y-1) = 0\right\}.$$

Après calcul du produit scalaire, nous obtenons :

$$\mathcal{C} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 4x + 3 + y^2 - 3y + 2 = 0\right\}.$$

Il est possible de réécrire l'équation obtenue sous la forme suivante :

$$\mathcal{C} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{C} \text{ est donc le cercle de centre } \left(2\,;\frac{3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{5}}{2}.}$$

2. Le cercle de diamètre $[AB]$ admet pour centre le milieu de $[AB]$ et pour rayon la moitié de la distance AB. Nous avons :

$$\frac{A+B}{2} = \left(\frac{1+3}{2}\,;\frac{2+1}{2}\right) \text{ et } AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2}.$$

Après quelques calculs, il vient donc :

$$\frac{A+B}{2} = \left(2\,;\frac{3}{2}\right) \text{ et } AB = \sqrt{5}.$$

Le cercle de diamètre $[AB]$ admet donc pour équation :

$$\mathcal{C} = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \right\}.$$

3. Nous venons de montrer que l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est égal au cercle de diamètre $[AB]$.

Il s'agit d'une $\boxed{\text{propriété étudiée au collège,}}$ liant cercle et triangle : si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle ; réciproquement, si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit. Ici, le caractère rectangle du triangle se traduit par l'orthogonalité des vecteurs.

Exercice 6

La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.

Exercice 7

La correction de cet exercice sera mise en ligne prochainement.

Exercice 8

1. Les coordonnées de I s'obtiennent en calculant la demi-somme des coordonnées des points C et D :

$$I = \left(\frac{3+1}{2}\,;\frac{-3+1}{2}\,;\frac{-2+0}{2}\right).$$

Nous pouvons donc affirmer :

$$\boxed{I = (2\,;-1\,;-1).}$$

2. En notant $\mathcal{P}$ le plan considéré, on peut affirmer :

$$\mathcal{P} = \left\{ M \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \right\}.$$

En calculant les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IM}$, il vient :

$$\mathcal{P} = \left\{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ (-2\,;4\,;2) \cdot (x-2\,;y+1\,;z+1) = 0 \right\}.$$

Par définition du produit scalaire :

$$\mathcal{P} = \left\{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ -2(x-2) + 4(y+1) + 2(z+1) = 0 \right\}.$$

Ainsi, après calculs :

$$\mathcal{P} = \left\{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ -2x + 4y + 2z + 10 = 0 \right\}.$$

Enfin, après simplification :

$$\mathcal{P} = \left\{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 2y + z + 5 = 0 \right\}.$$

Une équation du plan passant par I et admettant le vecteur $\overrightarrow{CD}$ comme vecteur normal est donc $\boxed{-x + 2y + z + 5 = 0.}$

3. En notant $M = (x\,;y\,;z)$, nous pouvons affirmer :

$$CM = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2} \text{ et } DM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

L'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $CM = DM$ est donc égal à l'ensemble :

$$\left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2\right\}.$$

Après avoir développé les carrés, il vient :

$$\left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2\right\}.$$

On remarque que les quantités x^2, y^2 et z^2 se simplifient. Après calculs, nous obtenons :

$$\left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3,\ -4x + 8y + 4z + 20 = 0\right\}.$$

$$\boxed{\text{D'où la conclusion annoncée.}}$$

Exercice 9

En notant $\Omega = (1\,;0)$ et $A = (4\,;4)$, nous pouvons affirmer que le rayon du cercle de centre Ω et passant par A est la distance ΩA, or :

$$\Omega A = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2},$$

c'est-à-dire :

$$\Omega A = 5.$$

$$\boxed{\text{Une équation du cercle cherché est donc } (x-1)^2 + y^2 = 5^2.}$$

Exercice 10

1. Dans $\mathbb{R}^3$, si un plan possède une équation certésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et que $(a\,;b\,;c)$ n'est pas le triplet nul, alors $(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal à ce plan.
Aussi :

$$\boxed{\text{Un vecteur normal au plan } (P) \text{ est } (-2\,;-1\,;2).}$$

Un vecteur de $\mathbb{R}^3$ est normal au plan (Q) si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (Q). En posant

$$A = (1\,;0\,;2),\ B = (3\,;0\,;0) \text{ et } C = (4\,;1\,;-1),$$

un vecteur normal à (Q) est un vecteur $\vec{n}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0. \end{cases}$$

Nous avons :

$$\overrightarrow{AB} = (2\,;0\,;-2) \text{ et } \overrightarrow{AC} = (3\,;1\,;-3).$$

Ainsi, en posant $\vec{n} = (x\,;y\,;z)$, le système précédent se réécrit :

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0, \end{cases}$$

et donc, de manière équivalente :

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ainsi, par exemple, un vecteur normal au plan } (Q) \text{ est } (1\,;0\,;1).}$

2. Calculons le produit scalaire des vecteurs $(-2\,;-1\,;2)$ et $(1\,;0\,;1)$. Il vient :

$$(-2\,;-1\,;2)\cdot(1\,;0\,;1) = -2\times 1 + (-1)\times 0 + 2\times 1.$$

Le produit scalaire est nul : $\boxed{\text{les deux vecteurs considérés sont orthogonaux.}}$