

Exercice 1

On note f la fonction définie pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x; y) = x^2y^2 + 2xy - 3x^2 + 1$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f puis les dérivées partielles secondes de f .
3. Le théorème de Schwarz est-il vérifié ?

Exercice 2

On note g la fonction de deux variables réelles définie par $g(x; y) = \ln(y^3 + x^2y - y)$.

- 1.a. Quel est l'ensemble de définition de g ? Le dessiner.
- 1.b. Démontrer que l'ensemble de définition de g n'est ni convexe, ni borné.
2. Donner le développement limité d'ordre 1 de g au voisinage de $(1; 1)$.
3. Quelle est une équation du plan tangent à la surface représentative de g au point $(1; 1; 0)$?
4. Utiliser la question 2. pour donner une valeur décimale approchée de $g(0,8; 1,1)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x; y) = \frac{3x}{x+y}$ pour tous les réels x et y vérifiant $x+y \neq 0$.

1. Dire brièvement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
- 2.a. Donner l'expression du gradient de f .
- 2.b. En utilisant la question précédente, estimer la différence $f(0,9; -2,2) - f(1; -2)$.
- 3.a. Calculer les élasticités partielles de f .
- 3.b. La variable x , initialement égale à 2, diminue de 6 % ; dans le même temps, la variable y , initialement égale à 1, augmente de 9 %. À l'aide d'un calcul approché, déterminer la variation relative de $f(x; y)$ liée à ces variations.
4. Lorsque $(x; y)$ passe de $(1; 1)$ à $(1,01; 0,97)$, quelle est approximativement la variation de $f(x; y)$? On donnera la variation absolue et la variation relative.

Exercice 4

On note φ et ψ les fonctions de deux variables réelles définies respectivement par :

$$\varphi(x; y) = \frac{2x^2}{y} \quad \text{et} \quad \psi(x; y) = \frac{2y}{x^3}.$$

Donner l'ensemble de définition de φ puis calculer ses dérivées partielles premières et secondes. Faire de même pour ψ .

Exercice 5

Donner l'ensemble de définition des trois fonctions suivantes. Dire pourquoi chacune est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, puis calculer ses dérivées partielles premières.

1. La fonction f définie par $f(x; y) = (x - y)(x - y^2)$.
2. La fonction g définie par $g(x; y) = \exp\left(\frac{3x - 2y}{x^2 + 1}\right)$.
3. La fonction h définie par $h(x; y) = x^2 \ln(x^2 + y^2)$.

Exercice 6

On note f la fonction de deux variables réelles dont l'expression est :

$$f(x; y) = \frac{xy + 1}{x^2 - y}.$$

1. Préciser le domaine de définition de f , noté D .
2. Démontrer que D n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D , puis calculer les dérivées partielles premières de f .
4. Calculer le gradient de f au point $(0; 1)$.

Exercice 7

Étudier précisément les fonctions définies par les expressions suivantes.

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$g(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right|\right)$$

Exercice 8

On note f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2)$. Le domaine de définition de la fonction f , inclus dans $\mathbb{R}^2$, sera noté $\mathcal{D}_f$.

1. Représenter $\mathcal{D}_f$, puis démontrer que $\mathcal{D}_f$ n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Répondre OUI ou NON, sans justifier : dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ est-il ouvert ? compact ?
3. Déterminer la courbe de niveau 0 de f ; en donner une représentation.
4. Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont vraies ? Justifier.

$$(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1; 7) = 0. \quad (b) \quad f(1; 1) = 3 \ln 2. \quad (c) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2; 0) = \frac{2}{5}.$$