**Université Paris-Dauphine** Année 2014-2015
DEGEAD 1[er] cycle
UE 13

---

**Contrôle continu n° 1 : 16 Mars 2015**

*Les documents et calculatrices sont interdits (on peut laiser des résultats sous forme de fractions). Toute réponse doit être justifiée.*

---

**Exercice 1** Soient les fonctions $f$ et $g$ suivantes

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

et

$$g(x) \;=\; (3-2x)e^{x^2}$$

1. Donner le domaine de définition de $f$ et $g$.
2. Donner les extrema de $f$ et $g$. Dire et justifier s'ils sont locaux et/ou globaux.
3. Donner les développements limité de $f$ à l'ordre 2 au voisinage du point 3.
4. Dènduire la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)-3}$$

**Exercice 2** La production $P$ d'une enterprise utilisant le travail comme seul facteur est donnée par :

$$P(q) \;=\; e^{a/2}\,(q+2)^2 - 2. \text{ pour } q \geqslant 0$$

1. Comment varie la production si on augmente les unités du travail ?
2. Calculer l'elasticité de P. Déduire $e_{p^2}$
3. Donner une valeur approchée de l'augmentation relative de la production si $q$ augmente de 10%, partant de $q = 2$. Remarque : on admet la valeur $\ln 2 \simeq 0,7$.
4. Quel est la percentage de taux de travail faut-il ajouter pour que l'augmentation relative de la production soit 100% ?

**Exercice 3** Représenter graphiquement les ensembles

1. $\mathcal{A} \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-2x-8 \leqslant -y^2 \text{ et } |x+y| \leqslant 2\}$
2. $\mathcal{B} \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-6x-4y+9 \geqslant 0 \text{ et } (]1,5[\times]-2,2[)\}$
3. $\mathcal{C} \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y+x+3=0 \text{ et } x^2+y^2+2x+4y+4 \leqslant 0\}$.
4. $\mathcal{D} \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > -x+3 \text{ et} y \;\leqslant -2x+3\}$.

Dire et justifier au moins à un niveau intuitif, s'ils sont ou non bornés, non-bornés, ouverts, fermés et compacts Dire et justifier s'ils sont convexes.

**Exercice 4** Soit la fonction $f$

$$f(x,y) \;=\; \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{x^2-4xy+4y^2}}$$

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. On note $C_k$ la courbe de niveau $k$ (avec $k\in\mathbb{R}$) de la fonction f. Déterminer $C_0$
3. Déterminer l'expression des dérivées premiéres de $f$.

Corrigé sommaire

**Exercice 1**

1. $\mathrm{dom}(f) = ]-1,1[$ et $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$.
2. On a $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0$ sur $\mathrm{dom}(f) = ]-1,1[$ (ouvert), donc f n'admet pas des extrema sur $]-1,1[$.
   On a $g'(x) = -2e^{x^2}(2x^2 - 3x + 1)$

   $$g'(x) = 0 \iff 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

   Alors

   $$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

   Et donc les deux points sont deux extrema. $g'$ change de signe de $-$ au $+$ au vois de $1/2$, donc $g(1/2) = 1/2$ est un min local et $g'$ change de signe de $+$ au $-$ au vois de 1, donc $g(1) = 1$ est un max local.
3. On calcule d'abord

   $$f(x) = x + x^2 O(x^2),$$
   $$g(x) = 3 - 2x + 3x^2 + x^2 O(x^2).$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x) - 3} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-2x + 3x^2} = -\frac{1}{2}$$

**Exercice 2**

1. Oui la production augmente si $q$ augmente car la fonction $P$ est croissante car $P'(q) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. En effet

   $$P'(q) \;=\; \frac{1}{2} e^{q/2}(q+2)(q+6) \;>\; 0$$

2. L'elasticité de P est

   $$e_P(q) = \frac{P'(q)}{P(q)} q$$

   et on obtient

   $$e_p(q) = \frac{e^{q/2} q(q+2)(q+6)}{2e^{q/2}(q+2)^2 - 4}.$$

   Pour $P^2$ : $e_{P^2} = 2e_P(q)$.
3. On a

   $$e_P(2) \times 10\% = \frac{64e}{32e - 4} \times 10\% = \frac{320e}{16e - 2}\% \simeq 20,96\%$$

4. $e_P(2) \times a\% = 100\% \implies a = 100 \times \frac{16e-2}{32e}$

**Exercice 3**

1. L'ensemble $\mathcal{A}$ est fermé car $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ bornée car $\mathcal{A}$ inclus dans une boule fermée, donc $\mathcal{A}$ compact. $\mathcal{A}$ est convexe car $\mathcal{A}$ est l'intersection de deux demi-plans et une boule.
2. L'ensemble $\mathcal{B}$ est ouvert car $\mathcal{F}_r(\mathcal{B}) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. $\mathcal{B}$ bornée car $\forall (x, y) \in \mathcal{B}$, $|x| \leqslant 5, |y| \leqslant 2.\mathcal{B}$ non compact car non fermé. $\mathcal{B}$ est non convexe car $(1, 1)$ et $(4, 1) \in \mathcal{B}$ mais leur milieu $\notin \mathcal{B}$
3. L'ensemble $\mathcal{C}$ est fermé car $\mathcal{F}_r(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ bornée car $\mathcal{C}$ est un segment. $\mathcal{C}$ compact. $\mathcal{C}$ est un segment donc il est convexe.
4. L'ensemble $\mathcal{D}$ est $\mathcal{F}_r(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$, $\mathcal{D}$ non bornée car il contient de demi-droites. $\mathcal{D}$ non compact. $\mathcal{D}$ est convexe car il est l'intersection de deux demi-plans.

**Exercice 4**

1. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0, x - 2y \neq 0, xy > 0\}$
2. $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
3. $$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{x\left(-\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) + x - 2y}{x(x - 2y)\sqrt{(x - 2y)^2}}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\sqrt{(x - 2y)^2}\left(2y\ln\left(\frac{x}{y}\right) - x + 2y\right)}{y(x - 2y)^3}$$

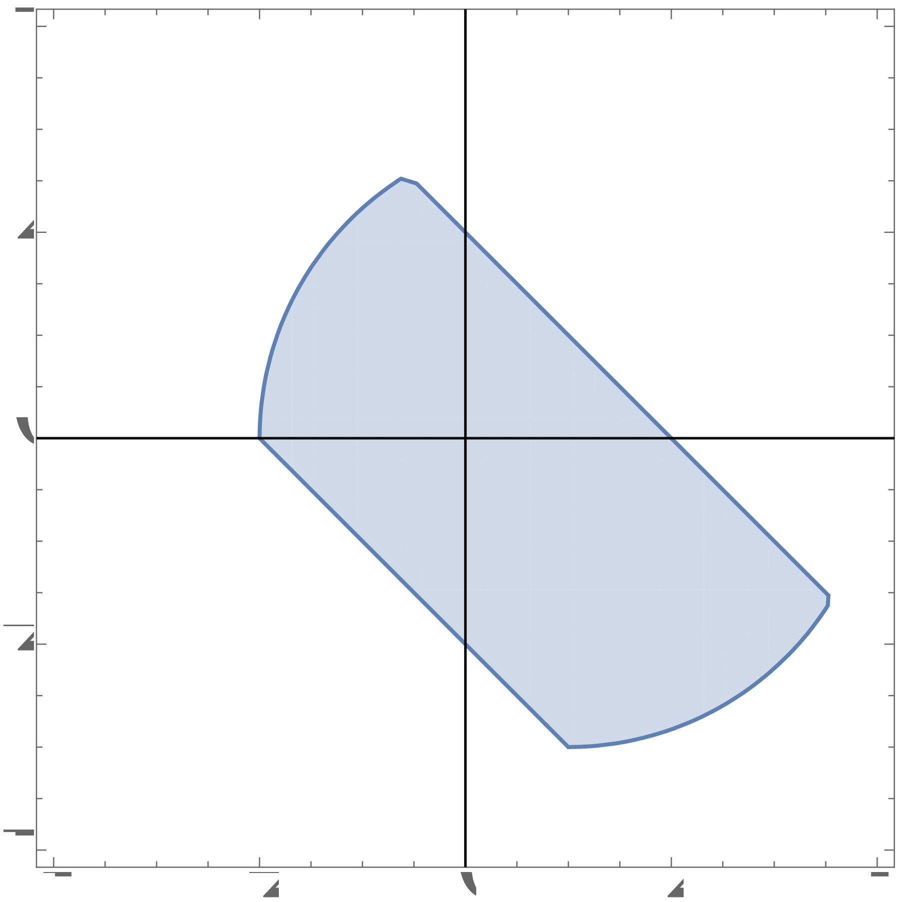

FIGURE 1 – $\mathcal{A}$

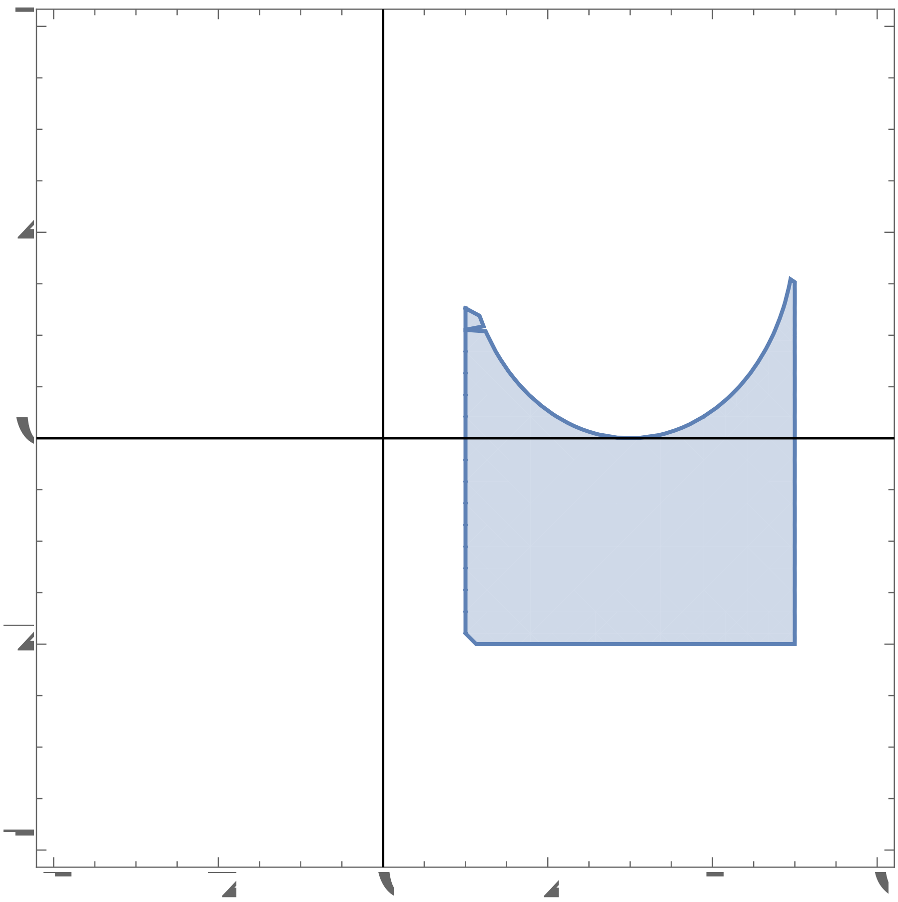

FIGURE 2 – $\mathcal{B}$

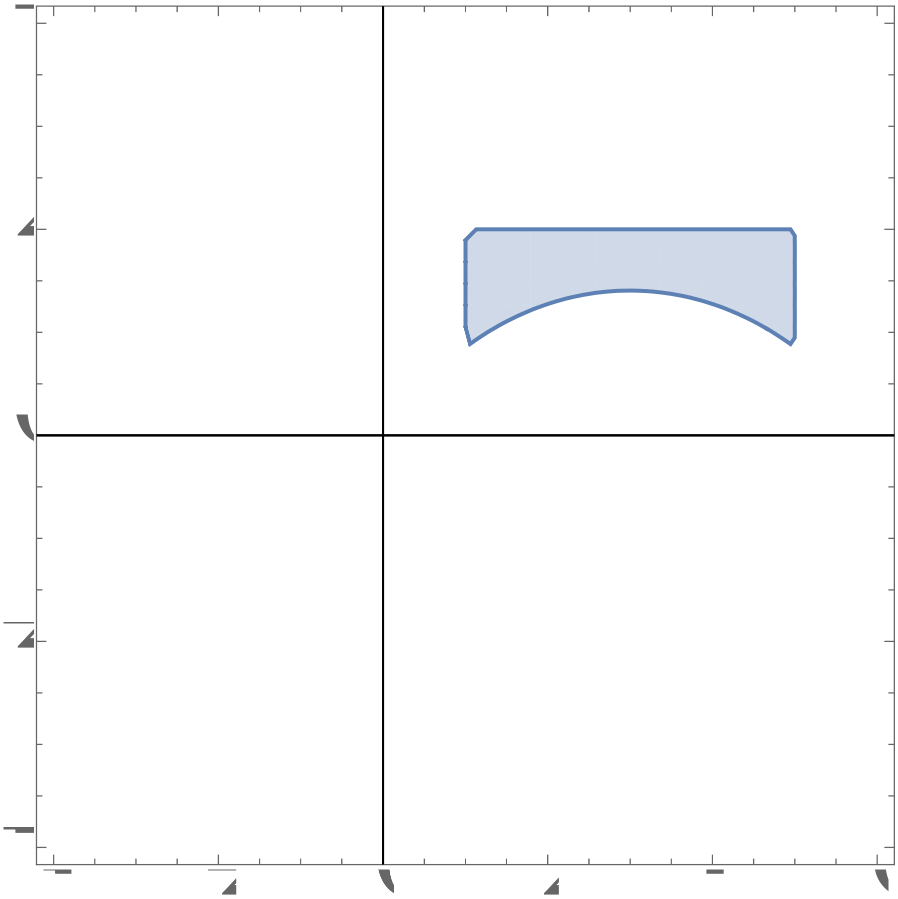

FIGURE 3 – $\mathcal{B}$ dans le cas $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9y \geqslant 0$

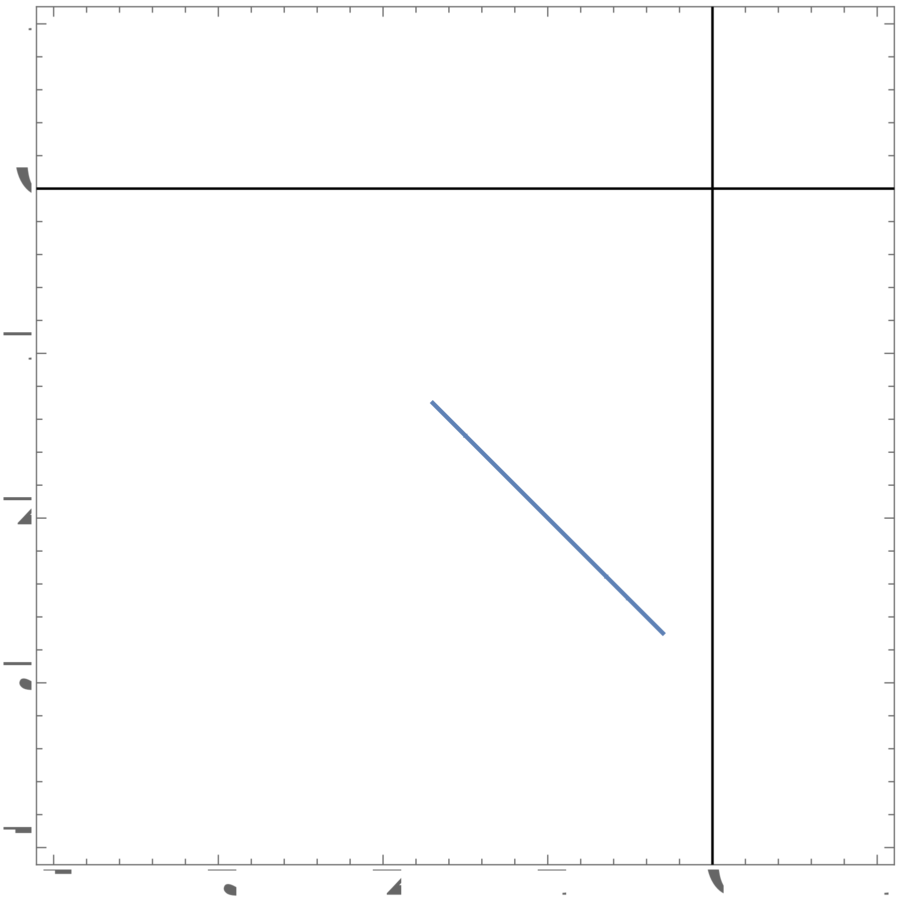

FIGURE 4 – $\mathcal{C}$

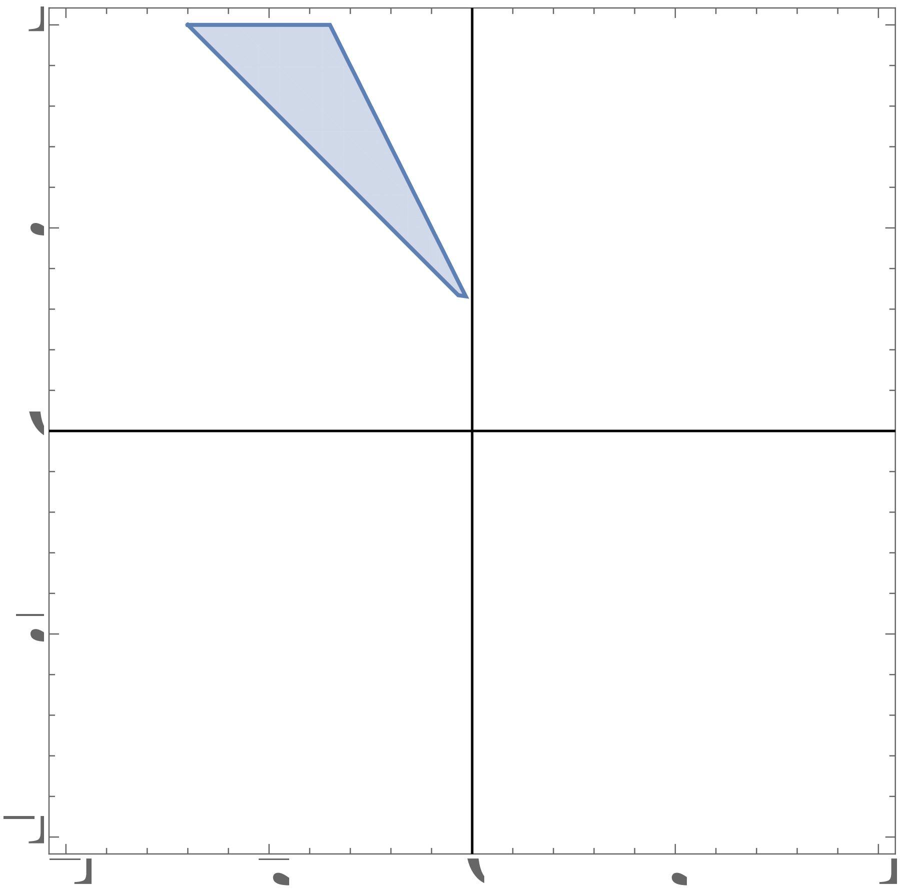

FIGURE 5 – $\mathcal{D}$