Solutions TD 12

Différentielle

Exercice 1.52 (Mise en oeuvre des définitions)
Soit $f(x,y) = e^{x/y}$.

(i) 1.
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \tag{1}$$

2. f est $\mathcal{C}^1$ car composée de $g \circ \phi$, ou $g(u) = e^u$ C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\phi(x,y) = x/y$ C^1 sur D_f, telles que $\phi(D_f) \subset \mathbb{R}$, on peut donc appliquer le corollaire 16.11, et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f.

(ii) Les dérivées partielles premières de f sont:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{e^{x/y}}{y} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= -\frac{xe^{x/y}}{y^2} \end{aligned} \tag{2}$$

(iii) On rappelle les définitions de

1. *vecteur gradient* $\nabla f(M_0)$ au point $M_0 = (x_0, y_0)$:
$$\nabla f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) \tag{3}$$

2. *variation absolue* $\triangle f_{M_0}(h,k)$ au point $M_0 = (x_0, y_0)$:
$$\triangle f(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \tag{4}$$

3. *différentielle* $df(h,k)$ au point $M_0 = (x_0, y_0)$:
$$df_{M_0}(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \tag{5}$$

Pour $M_0 = (0,1)$ et $M_1 = (1,2)$ on obtient

	M_0	M_1
∇f	$\nabla f(M_0) = (1,0)$	$\nabla f(M_1) = (\frac{e^{1/2}}{2}, -\frac{e^{1/2}}{4})$
$\triangle f(h,k)$	$\triangle f_{M_0}(h,k) = f(h, 1+k) - f(0,1) = e^{h/(1+k)} - 1$	$\triangle f_{M_1}(h,k) = f(1+h, 2+k) - f(1,2) = e^{(1+h)/(2+k)} - e^{1/2}$
$df(h,k)$	$df_{M_0}(h,k) = h$	$df_{M_1}(h,k) = h\frac{e^{1/2}}{2} - k\frac{e^{1/2}}{4}$

(iv) Le valeur exact de $f(0.1, 0.8)$ est $e^{0.1/0.8} = 1.13315$, le valeur approché est

$$f(0.1, 0.8) \simeq f(0, 1) + df_{M_0}(0.1, -0.2) = e^{0/1} + 0.1 = 1.1.$$

Cependant, le valeur exact de $f(0.9, 2.1)$ est $e^{0.9/2.1} = 1.53506$ et son valeur approché est

$$f(0.9, 2.1) \simeq f(1, 2) + df_{M_1}(-0.1, 0.1) = e^{1/2} - 0.1\frac{e^{1/2}}{2} - 0.1\frac{e^{1/2}}{4} = 1.52507$$

(v) On rappelle le DL à l'ordre 1 au voisinage de $M_0 = (x_0, y_0)$:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)+\sqrt{h^2+k^2}\epsilon(h, k). \quad (6)$$

Alors

1. DL au voisinage de $M_0 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(h, 1+k) &= f(0, 1) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) + \sqrt{h^2+k^2}\epsilon(h, k) \\ &= 1 + h + \sqrt{h^2+k^2}\epsilon(h, k) \end{aligned} \quad (7)$$

2. DL au voisinage de $M_1 = (1, 2)$

$$\begin{aligned} f(1+h, 2+k) &= f(1, 2) + h\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) + \sqrt{h^2+k^2}\epsilon(h, k) \\ &= e^{1/2} + h\frac{e^{1/2}}{2} - k\frac{e^{1/2}}{4} + \sqrt{h^2+k^2}\epsilon(h, k) \end{aligned} \quad (8)$$

(vi) L'approximation affine de f au voisinage du point M_0 est

$$\hat{f}_{M_0}(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)+df_{M_0}(h, k). \quad (9)$$

Alors

1. approx. affine au voisinage de $M_0 = (0, 1)$

$$\hat{f}_{M_0}(h, 1+k) = f(0, 1) + df_{M_0}(h, k) = 1 + h. \quad (10)$$

2. approx. affine au voisinage de $M_1 = (1, 2)$

$$\hat{f}_{M_1}(1+h, 2+k) = f(1, 2) + df_{M_1}(h, k) = e^{1/2} + h\frac{e^{1/2}}{2} - k\frac{e^{1/2}}{4} \quad (11)$$

(vii) On rappelle que l'équation du plan tangent en $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ à la surface répresentative S du graphe de f est: $z = \hat{f}_{M_0}(x, y)$, où $x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$. Alors

1. l'équation du plan tangent en $P_0 = (0, 1, f(0, 1))$ est

$$z = \hat{f}_{M_0}(x, y) = f(0, 1) + df_{M_0}(x, y) = 1 + x. \tag{12}$$

2. l'équation du plan tangent en $P_0 = (1, 2, f(1, 2))$ est

$$\hat{f}_{M_1}(x, y) = f(1, 2) + df_{M_1}(x, y) = e^{1/2} + (x-1)\frac{e^{1/2}}{2} - (y-2)\frac{e^{1/2}}{4} = e^{1/2}(1 + \frac{x}{2} - \frac{y}{4}) \tag{13}$$