Solutions TD 6

Exercice 1.36

1. Le produit scalaire (Déf. 11.12) de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^3$ oú $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ est défini par le nombre réel noté $\langle x, y\rangle$: $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

   Pour $x = (3, 0, -4)$ et $y = (-6, 2, 3)$ on a $\langle x, y\rangle = -18 + 0 - 12 = -30$

   La norme (Déf. 11.14) d'un vecteur x est le nombre réel $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

   Pour $x = (3, 0, -4)$ la norme est $\|x\| = \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} = 5$ et pour $y = (-6, 2, 3)$ la norme est $\|y\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$

2. La distance (Déf. 11.18) entre les points $P = (1, 2, 3)$ et $Q = (7, 5, 1)$ est le réel défini par $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - p\| = \sqrt{(7-1)^2 + (5-2)^2 + (1-3)^2} = 7$

Exercice 1.38

1. Équation de la droite D_1 passant par deux points A et B.

   On utilise la méthode 11.34, il suffit d'écrire que le determinant $det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB})$ est nul.

   Pour $A = (2, -3)$, $B = (4, -5)$ et $M = (x, y)$ on a $\overrightarrow{AM} = (x - 2, y + 3)$ et $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$

   $$det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = det\begin{pmatrix} x-2 & ,y+3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2(x-2)-2(y+3) = -2y-2x-2 = 0$$

   alors $D_1 : x + y + 1 = 0$

2. Équation de la droite D_2 passant par le point $C = (-1, 3)$ et orthogonale au vecteur $v = (-3, 2)$.

   On utilise la Prop. 11.31: $D_2 = \{M \in \mathbb{R}^2 | \langle\overrightarrow{CM}, v\rangle = 0\}$ et on trouve pour $\overrightarrow{CM} = (x + 1, y - 3)$, donc

   $$\langle\overrightarrow{CM}, v\rangle = -3(x + 1) + 2(y - 3) = 0$$

   et D_2: $-3x + 2y + 11 = 0$.

3. Équation de la droite D_3 passant par le point $D = (1, -3)$ et de vecteur directeur $w = (-2, -5)$.

   Selon la Prop. 11.31, $D_3 = \{M \in \mathbb{R}^2 | \langle\overrightarrow{DM}, v\rangle = 0\}$ est la droite passante par D et orthogonale à $v = (a, b)$ et de vecteur directeur $w = (-b, a)$.

   Donc pour $b = 2$ et $a = -5$, on a $v = (5, 2)$ et $\overrightarrow{DM} = (x - 1, y + 3)$

   $$\langle\overrightarrow{DM}, v\rangle = -5(x - 1) + 2(y + 3) = 0$$

   D_3: $-5x + 2y + 11 = 0$

4. Équation cartésianne du cercle de centre $A = (-1, 2)$ et de rayon $r = 5$

   On utilise la déf 11.38 alors

$$C(A, r) = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2\}.$$