Université Paris-Dauphine
Département LSO
DEGEAD 1ère année

UE 15 Outils mathématiques

Correction du contrôle continu du 14 novembre 2013

1heure 30

Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.

Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Tous les calculs doivent figurer sur la copie : un résultat exact, mais non justifié sera considéré comme nul.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur le domaine D par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = e^{x-1} - 1.$$

1. (a) Le domaine de définition D de la fonction f est $\mathbb{R}$ d'après les propriétés de la fonction exponentielle.

   (b) La dérivée de f est $f'(x) = e^{x-1}$ pour tout réel x.

   (c) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (d) Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier le signe de f''. Or $f'' = f' > 0$ donc la fonction f es convexe, sur $\mathbb{R}$.

   (e) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 1$ est $y = x - 1$.

   (f) Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, le graphe de f est au dessus de toutes ses tangentes en particulier la tangente en $x = 1$, on en déduit que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x-1} \geq x.$$

   (g) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. De plus on a

   $$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-1, +\infty[.$$

   (h) Pour tout y de $]-1, +\infty[$

   $$y = f(x) \iff x = \ln(y+1) + 1.$$

   Donc

   $$\forall y \in]-1, +\infty[, \quad f^{-1}(y) = \ln(y+1) + 1.$$

(i) Pour la courbe représentative de f, bien placer la tangente ainsi que l'asymptote horizontale.

2. On se propose d'étudier les solutions de l'équation $f(x) = x$. On pose

$$\forall x \in I\!R, \ \ g(x) = f(x) - x.$$

(a) On a $g' = f$ donc g est décroissante sur $]-\infty, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$. De plus

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \text{ par croissances comparées.}$$

(b) Comme $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $g(1) < 0$, la continuité de g implique l'existence d'un réel $a < 1$ tel que $g(a) = 0$. De même comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $g(1) < 0$, il existe un réel $b > 1$ tel que $g(b) = 0$.

(c) On a $g(1) = -1 < 0$ et $g(3) = e^2 - 4 > 0$ donc la croissance de g implique que $1 < b < 2$.

(d) Le théorème de la bijection permet d'affirmer que g est une bijection de $]-\infty, 1]$ dans $[-1, +\infty[$, on en déduit l'unicité de a. De même b est l'unique réel supérieur à 1 tel que $g(b) = 0$. Or l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à $f(x) = x$ donc l'équation $f(x) = x$ admet comme seules solutions a et b.

Exercice 2 On considère la fonction définie sur $I\!R$ par

$$g(x) = e^{-|x|} \times x^2$$

1. Pour tout réel x,

$$g(-x) = e^{-|-x|} \times (-x)^2 = g(x).$$

Donc la fonction g est paire.

2. On a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \times x^2 = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Par parité de g on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

3. Comme g est paire, il suffit de calculer la dérivée sur $I\!R^+$.

$$\forall x > 0, \ \ g'x) = e^{-x} \times (2x - x^2)$$

Par parité

$$\forall x < 0, \ \ g'x) = -g'(-x) = e^{x} \times (2x + x^2)$$

Pour $x = 0$, le taux d'accroissement donne

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

Donc $g'(0) = 0$. Ainsi au final

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; g'(x) = e^{-|x|} \times (2x - |x|\, x).$$

4. Sur $\mathbb{R}^+$, g est croissante sur $[0, 2]$ puis décroissante sur $[2, +\infty[$.

5. On montre d'abord que g est C^2 sur $\mathbb{R}$. C'est le cas sur $\mathbb{R}^*$. En 0, g est dérivable. D'après les expressions obtenues pour g', la dérivée de g est continue en 0. Enfin

   $$\forall x > 0, \;\; g''(x) = e^{-x} \times (2 - 4x + x^2)$$

   Le taux d'accroissement de g' en 0 tend vers 2 ce qui est aussi la limite de g'' en 0.

   Par conséquent g est C^2 sur $\mathbb{R}$.

   La convexité est donnée par le signe de g'''. Or le signe de $x^2 - 4x + 2$ est négatif entre les racines et positif à l'extérieur. On en déduit que g est convexe sur $]-\infty, -2 - \sqrt{2}]$ et sur $[2 + \sqrt{2}, +\infty[$ ainsi que sur $[-2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}]$ et concave sur $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$ et sur $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$.

6. Pour le graphe, bien respecter la parité.