

Correction de l'examen du 13 octobre 2012

1heure 30

On considère la fonction f définie sur le domaine D par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

1. Pour tout réel x ,

$$x^2 + 1 > x^2 \geq 0$$

la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq -x.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

Le domaine de définition de la fonction f est $D = \mathbb{R}$.

2. Le calcul donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = 1.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln((x + \sqrt{x^2 + 1})) + \ln((-x + \sqrt{x^2 + 1})) = \ln 1 = 0.$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(-x) = 0.$$

La fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

3. Par composition de limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -f(-x) = -\infty.$$

4. On a pour $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln((x + \sqrt{x^2 + 1}))}{x} \\ &= \frac{\ln((1 + \sqrt{1 + 1/x^2})) + \ln x}{x} \\ &= \frac{\ln((1 + \sqrt{1 + 1/x^2}))}{x} + \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

On en déduit que la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est 0.

5. On a pour tout réel x

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{1}{2}2x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(\sqrt{x^2+1} + x) \times \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

6. La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

7. On calcule la dérivée seconde car f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

$$f''(x) = \frac{-1}{2}2x \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}-$ et convexe sur $\mathbb{R}^+$.

8. L'équation de la tangente est

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x.$$

9. Comme f est convexe sur $\mathbb{R}-$, le graphe de f est au dessus de toutes ses tangentes en particulier pour la tangente en $x = 0$ donc

$$\forall x \geq 0, \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \leq x.$$

10. La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans

$$f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [= \mathbb{R}.$$

11. Soit y un réel, il existe un unique réel x tel que $y = f(x)$. Or on a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ &\iff e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\ &\iff e^y - x = \sqrt{x^2+1} \\ &\implies e^{2y} + x^2 - 2xe^y = x^2 + 1 \\ &\implies -2xe^y = +1 - e^{2y} \\ &\implies x = \frac{+1 - e^{2y}}{-2e^y} \\ &\implies x = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} \\ &\implies x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}. \end{aligned}$$

Si $y = f(x)$, la seule valeur possible pour x est $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Or la bijectivité de f assure l'existence d'une solution x donc

$$y = f(x) \iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Par conséquent

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

12. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}.$$

On admet que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) On a pour tout réel x

$$\begin{aligned} F'(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(b) On a donc

$$I = \int_0^1 f(t) dt = [F(t)]_0^1 = F(1) - F(0) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

13. Tracer le graphe de f et hachurez l'aire correspondante au calcul de I .