

EX 1.40 (Equation de plans et de sphères dans $\mathbb{R}^3$).

i) On donne l'équation du plan P_1 L_q .

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$$

En utilisant : Proposition 11.37 du cours :

soit $\Pi(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $w = \vec{AB}$ (On peut choisir
 $w = \vec{AC}$ ou
 $w = \vec{BC}$).

w est un vecteur orthogonal à P . L_q .

$$\langle \vec{A\Pi}, w \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{A\Pi}, \vec{AB} \rangle = 0.$$

$$\text{Or } \vec{A\Pi} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ -1-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{par suite } \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot (-1) + (y-1) \cdot (-2) + (z-1) \cdot (-2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -x + 1 - 2y + 2 - 2z + 2 = 0.$$

$$P_1 : -x - 2y - 2z + 5 = 0.$$

ii). P_2 L_q passe par $D(0, -1, 3)$
orthogonal à $v = (-1, 1, 2)$.

Soit $M \in \mathbb{R}^3$ L_q $M(x, y, z)$.

$$\langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x - 0 \\ y + 1 \\ z - 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$(-1)x + 1 \cdot (y + 1) + 2(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + y + 1 + 2z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow P_2: -x + y + 2z - 5 = 0.$$

$$\text{iii)} \quad S((-1, 2, 3), 2) = \left\{ M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \right. \\ \left. (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 2^2 \right\}.$$

$$S: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4.$$