1 f est définie sur tout $\mathbb{R}$ et de classe C^2 comme produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

2 $f'(x) = e^{-x}\left(2(x-1) - (x-1)^2\right) = e^{-x}(x-1)(3-x) = e^{-x}(-x^2+4x-3)$

$f''(x) = e^{-x}(-2x+4+x^2-4x-3) = e^{-x}(x^2-6x+7)$

3 On a $f(0)=1$, $f'(0)=-3$, $f''(0)=7$, d'où le DL de f au 2 ième ordre en 0 :

$f(x) = 1 - 3x + \frac{7}{2}x^2 + \varepsilon(x)x^2$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$

4 L'équation de la tangente en zéro est donc $y = 1 - 3x$ et la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente en zéro, car $7/2 > 0$.

5 L'approximation affine de f en 0 est $f_0^1(x) = 1 - 3x$

Donc $f(0,1) = 0,81\,e^{-0,1} \simeq f_0^1(0,1) = 0,7$

6 On a $f(x) \geq 0$ pour tout x et $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 1$, $f(1)=0$

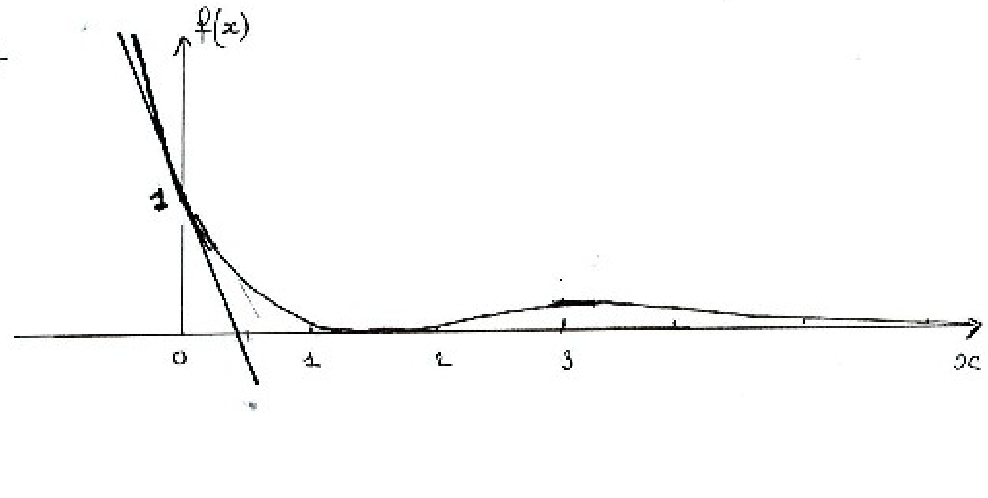
Donc f présente un unique minimum global en 1. Comme $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$, f n'admet pas de maximum global.

Pour trouver les extrémas locaux, calculons les solutions de

$$f'(x) = e^{-x}(x-1)(3-x) = 0$$

On retrouve 1 et on obtient $f'(3)=0$. On a $f''(3) < 0$ donc f admet un maximum local en 3. On a $f(3) = 4e^{-3}$.

7



8 $e_f(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x\dfrac{(3-x)}{(x-1)}$

9 (a) On a $f(2,1) - f(2) \simeq f'(2) \times 0,1 = e^{-2} \times 0,1$

Donc si x augmente de 0,1 à partir de 0,1, $f(x)$ augmente de $e^{-2} \times 0,1$.

(b) On a $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{f(2)} \simeq e_f(2)\dfrac{h}{2} = 2 \times \dfrac{h}{2}$

Donc si f a diminué de 5 %, x a diminué de 2,5 %.

La nouvelle valeur de x est 1,95.