

**Devoir Maison à rendre pour le 16 Novembre (pour les volontaires)**

**Exercice 1** Soient les fonctions

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad g(x) = \ln(x)\sqrt{1+x}.$$

1. Donner les domaines de définitions de  $f$  et  $g$  et montrer qu'elles sont chacune de classe  $C^2$  sur leur domaine de définition.
2. Donner les développements limités de  $f$  et  $g$  à l'ordre 2 au voisinage du point 1.
3. En déduire la limite au point 1 de la fonction suivante

$$h(x) = \frac{2ef(x) - (e^2 + 1)x + 2}{\sqrt{2}(x-1) - g(x)}.$$

4. Donner l'équation des tangentes aux graphes de  $f$  et  $g$  au point 1. Préciser la position des tangentes par rapport aux graphes au voisinage du point 1.
5. On suppose que  $x > 0$  et dans ce cas  $f(x)$  représente le coût total de production d'un bien  $A$  en fonction de la quantité produite  $x$  ( $x$  est exprimé en millier d'unités du bien  $A$ ).  
Pour tout  $x > 0$ , déterminer le coût moyen  $f_M(x)$  et le coût marginal  $f_m(x)$ .
6. On se place au niveau de production  $x = 1$ . Donner une valeur approchée de la variation relative du coût lorsque l'on augmente la production de 2%.
7. Montrer que le coût de production  $f$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$ .
8. Calculer la fonction réciproque de  $f$ . (on pourra poser  $X = e^x$ ).
9. Pour tout  $x > e$  calculer l'élasticité de  $fg$  au point  $x : e_{fg}(x)$ .

**Exercice 2** Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{20x^2 - 18x + 11}{(2x-1)^2(x+3)}.$$

1. Pour tout entier  $n$ , donner les dérivées d'ordre  $n$  de  $f$  et donner les domaines de définition associés.

Indication : On pourra dans un premier temps trouver les réels  $a$  et  $b$  vérifiant l'égalité suivante

$$f(x) = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{x+3}.$$

**Exercice 3** Soient les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}; B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\};$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\}; D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\} .$$

1. Représenter ces ensembles.
2. Préciser si ils sont bornés.