

Introduction

Ce livre est destiné aux étudiants de M2 en mathématiques appliquées ou en thèse qui souhaitent approfondir les fondements de la finance mathématique et les principaux outils servant à la gestion des risques financiers. Sa lecture nécessite de solides bases en probabilité, notamment en calcul stochastique.

La première partie de cet ouvrage traite des théorèmes fondamentaux d'évaluation d'actif, qui servent de socles à l'évaluation et à la couverture des risques. Nous y expliquons, dans un cadre mathématique très général, comment l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est liée à l'existence de mesures risque neutre, et le rôle que jouent celles-ci dans l'évaluation des produits dérivés.

L'analyse est tout d'abord conduite dans le cadre de modèles en temps discret, plus simples à présenter et à traiter que les modèles en temps continu qui font l'objet du deuxième chapitre. La présence de contraintes de portefeuille est également discutée. Dans tous ces cas, nous verrons que l'absence d'opportunité d'arbitrage ne permet pas de définir un prix de manière unique pour les produits dérivés, sauf si le marché est complet et que les achats et ventes ne sont pas contraints. Il fournit, en revanche, un intervalle de *prix viables*, c'est-à-dire ne conduisant pas à la création d'arbitrage, dont la borne supérieure est le prix de sur-réplication, prix auquel une option doit être vendue pour permettre la mise en place d'une couverture sans risque.

Le dernier chapitre de cette partie est consacré aux problèmes de gestion de portefeuille. Ils sont traités en utilisant une démarche économique classique pour modéliser le choix dans l'incertain qui repose sur l'utilisation de fonction d'utilité. Nous montrons comment l'approche par dualité permet une résolution explicite lorsque le marché est complet. Nous expliquons également comment cette approche permet de déterminer un prix pour les options lorsque le marché est incomplet.

Dans la deuxième partie, nous restreignons l'étude aux modèles markoviens, qui sont ceux utilisés en pratique. Plus précisément, nous supposons que le processus modélisant l'évolution du cours des actifs liquides est donné par la solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien. Le premier chapitre traite de la couverture des produits dérivés dans les marchés complets. Il est alors possible de caractériser le prix d'une option comme solution d'une équation aux dérivées partielles et de montrer que la stratégie de couverture est donnée par la dérivée de ce prix par rapport à la valeur des actifs liquides. C'est ce que l'on appelle la couverture en delta (*delta hedging*).

L'étude est menée pour les principaux types de produits dérivés : options vanilles, à barrière et américaines. D'autres produits dérivés, notamment liés aux taux, font l'objet d'exercices. Nous caractérisons tout d'abord la fonctionnelle de prix en supposant qu'elle est régulière, puis nous faisons appel à la notion de solution de viscosité pour traiter les cas où elle n'est pas suffisamment différentiable. Dans les deux cas, l'équation obtenue est linéaire. Nous présentons également différentes manières de calculer la stratégie de couverture : approche par processus tangent, caractérisation par équation aux dérivées partielles, approche par calcul de Malliavin.

Le chapitre suivant reprend cette analyse dans le cadre de marchés imparfaits : incomplets ou avec contraintes de portefeuille. Nous obtenons une caractérisation du prix de sur-réplication comme solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire. Lorsque l'imperfection de marché est uniquement liée à des contraintes de portefeuille, nous expliquons comment se ramener au cas sans contrainte en modifiant le payoff de l'option. C'est ce que l'on appelle le *face-lifting*. Lorsque l'imperfection est due à une incomplétude, l'équation ne peut être simplifiée. Elle donne toutefois des indications sur la manière dont le risque peut être couvert de manière certaine. Malheureusement, dans certains cas, ceci conduit à un prix de vente si élevé qu'il ne peut être utilisé en pratique. Nous le montrons à travers l'exemple d'un modèle à volatilité stochastique.

Le dernier chapitre de cette deuxième partie porte sur l'étude

des problèmes d'évaluation de produit dérivés sous critère de risque. Nous ne cherchons plus un prix permettant de se couvrir sans risque, comme dans le chapitre précédent, mais un prix assurant une couverture satisfaisante au sens d'un critère de risque défini comme l'espérance d'une fonction de perte de la position nette finale. Ce problème a déjà été introduit dans le dernier chapitre de la première partie, mais sans que l'on puisse alors fournir de réponse satisfaisante pour les marchés incomplets. Nous faisons ici appel aux techniques de cible stochastique pour obtenir une caractérisation de la fonction de prix associée comme solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire de type Hamilton-Jacobi-Bellman, qui peut ensuite être résolue numériquement. Ceci procure un outils effectif de calcul du prix là où l'approche par dualité en marché incomplet ne donne qu'un résultat d'existence et de dualité.

La troisième partie est consacrée à la mise en œuvre pratique des stratégies de couverture dans les deux principales classes de modèle utilisées dans l'industrie : volatilité locale et volatilité stochastique. Nous nous intéressons notamment aux problèmes de calibration, à l'impact d'une erreur de modèle sur la qualité de la couverture, à l'effet du rebalancement en temps discret des positions de couverture, et à la mise en place de stratégies de couverture semi-statiques.

Table des matières

A.	Absence d'opportunité d'arbitrage et théorèmes fondamentaux d'évaluation d'actifs	11
1	Modèles en temps discret	13
1	Actifs financiers et stratégies de portefeuille	13
2	Absence d'arbitrage et mesures martingales	16
2.1	Définition de l'absence d'opportunité d'arbitrage	16
2.2	Énoncé du premier théorème fondamental . .	17
2.3	Preuve du premier théorème fondamental . .	18
3	Évaluation d'options européennes	24
3.1	Notions de prix	24
3.2	Caractérisation des actifs sur-répliqués en partant d'une richesse nulle	25
3.3	Formulation duale du prix de sur-réplication et de l'ensemble des prix viables	29
3.4	Caractérisation de la stratégie de couverture des actifs atteignables	30
4	Marchés complets	31
4.1	Définition et caractérisation	31
4.2	Théorème de représentation des martingales et couverture d'options européennes	33
5	Évaluation d'options américaines	34
5.1	Surmartingale et enveloppe de Snell	35
5.2	Prix de sur-réplication et $\mathcal{M}(\tilde{S})$ -enveloppe de Snell	38
5.3	Prix de sur-réplication et arrêt optimal	38
5.4	Ensemble de prix viables	42
5.5	Stratégie d'exercice rationnelle	44

6	Modèles avec contraintes de portefeuille	45
7	Exercices	47
7.1	Modèle de Cox-Ross-Rubinstein	47
7.2	Un modèle à deux périodes et espace d'état fini	48
7.3	Contrainte d'absence de vente à découvert . .	50
7.4	Coûts de transaction proportionnels	51
7.5	Coûts de transaction fixes	52
7.6	Modèle de taux de Ho et Lee	54
7.7	Théorème de Kreps-Yan en dimension finie .	57
7.8	Options américaines <i>callable</i>	57
7.9	Options swing	59
7.10	Modèle à information imparfaite	62
7.11	Modèle avec impact de la stratégie sur les prix	63
2	Modèles d'Itô en temps continu	65
1	Actifs financiers et stratégies de portefeuille	65
1.1	Actifs financiers	65
1.2	Stratégies et portefeuilles	67
2	Absence d'arbitrage et mesures martingales	68
2.1	Condition nécessaire	68
2.2	Condition suffisante	70
2.3	Condition nécessaire et suffisante	73
3	Évaluation par critère de sur-réplication	74
4	Marchés complets	76
4.1	Caractérisation	76
4.2	Cas d'une volatilité inversible	78
4.3	Couverture d'options européennes et calcul de Malliavin	80
4.4	Options américaines : couverture et exercice rationnel	84
5	Couverture avec contrainte de portefeuille	88
5.1	Formulation duale du prix de sur-réplication .	88
5.2	Famille auxiliaire de problèmes non contraints	90
5.3	Étude du problème dual	91
6	Exercices	94
6.1	Évaluation d'un zéro-coupon	94

6.2	Swap	94
6.3	Absence d'exercice anticipé pour le call américain	94
6.4	Décomposition de payoff	95
6.5	Le modèle de Black et Scholes multivarié	95
6.6	Coefficients dépendants du temps	98
6.7	Option à barrière dans le modèle de Black et Scholes	99
6.8	Option sur spread	100
6.9	Contrat forward sur taux de change	101
6.10	Call sur forward	101
6.11	Option asiatique : moyenne géométrique	101
6.12	Chooser option	102
6.13	Formulation alternative du prix d'une option américaine	104
6.14	Call sur zéro-coupon dans le modèle de Vasiček	106
6.15	Modèle de Vasiček à deux facteurs	108
6.16	Modèle G2++	110
6.17	Modèle de marché pour les taux Libor	112
6.18	Modèle de marché pour les taux swap forward	113
6.19	Doubling strategies : importance de la notion d'admissibilité	116
3	Gestion optimale et sélection d'un prix	119
1	Gestion optimale de portefeuille	119
1.1	Dualité en marché complet	119
1.2	Extension aux marchés incomplets	122
1.3	Prix d'indifférence	124
2	Couverture par fonction de perte moyenne	125
2.1	Couverture en quantile	125
2.2	Couverture sous contrainte de perte espérée	129
2.3	Commentaires	132
3	Exercices	133
3.1	Transformée de Fenchel	133
3.2	Stratégie de gestion optimale explicite pour les fonctions d'utilité CRRA	134

Table des matières	292
3.3 Quantile hedging dans le modèle de Black et Scholes	134
B. Évaluation et couverture dans les modèles markoviens : approche par équations aux dérivées partielles	137
4 Couverture en δ en marchés complets	139
1 Modèles markoviens	140
2 Options européennes vanilles	142
2.1 Le cas régulier : formule de Feynman-Kac et couverture en δ	143
2.2 Le cas irrégulier : caractérisation du prix par solutions de viscosité	149
2.3 Processus tangent, dérivée de Malliavin et δ	153
3 Options à barrière	157
3.1 Équation d'évaluation avec condition au bord de Dirichlet	158
3.2 Couverture en δ , phénomène d'explosion et techniques de régularisation	161
4 Options américaines	163
4.1 Principe de programmation dynamique	164
4.2 Caractérisation en termes d'inéquations quasi variationnelles	167
4.3 Stratégie de couverture en δ dans le cas régulier	169
5 Exercices	170
5.1 Call dans le modèle de Black et Scholes : argument de vérification	170
5.2 Modèles avec dividendes	171
5.3 Option à double barrière	172
5.4 Options bermudéennes	173
5.5 Option asiatique : moyenne arithmétique	174
5 La sur-réplication et ses limites	177

1	Contraintes de portefeuille	178
1.1	Cadre de travail	178
1.2	Équation d'évaluation	180
1.3	Principe d'équivalence : couverture d'un payoff modifié sans contrainte	187
2	Application à certaines incomplétudes	190
2.1	Volatilité non couvrable : Équation de Black-Scholes-Barenblatt	191
2.2	Volatilité non couvrable, le cas non borné : Stratégie <i>buy-and-hold</i>	194
3	Exercices	195
3.1	Quelques propriétés du <i>Face-lift</i>	195
3.2	Équation de Black-Scholes-Barenblatt	196
3.3	Borne supérieure pour le prix de couverture sous contrainte	196
3.4	Caractérisation de fonction croissante au sens de la viscosité	198
6	Couverture sous contraintes de risque	201
1	Sur-réplication : approche directe	202
1.1	Modélisation générale	202
1.2	Principe de programmation dynamique	204
1.3	Équation d'évaluation	205
1.4	Condition terminale de l'équation d'évaluation	211
2	Couverture sous contraintes de risque	216
2.1	Réduction du problème	219
2.2	Équation d'évaluation	221
2.3	Condition au bord en temps	224
3	Commentaires	226
4	Exercices	227
4.1	Dérivation du prix de couverture par l'approche directe	227
4.2	Résolution explicite du problème de quantile hedging	230

C. Mise en œuvre pratique d'une couverture dans les principales classes de modèle 233

7 Modèles à volatilité locale 235

- 1 Modèle de Black et Scholes et volatilité implicite . . . 235
- 2 Nappe de volatilité locale 237
 - 2.1 Équation et formule de Dupire 237
 - 2.2 Calibration de la nappe de volatilité à partir d'un nombre fini de calls 241
- 3 Gamma de l'option et impact sur la couverture . . . 244
 - 3.1 Impact d'une erreur de spécification de la volatilité 244
 - 3.2 Impact du rebalancement discret 246
- 4 Un exemple de modèle paramétré : le modèle CEV . 248
- 5 Exercices 252
 - 5.1 Option à départ forward 252
 - 5.2 Erreur de couverture dans un modèle à corrélation stochastique 253
 - 5.3 Gamma hedging et rebalancement discret . . 256
 - 5.4 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 258

8 Modèles à volatilité stochastique 261

- 1 Couverture à l'aide d'options liquides, *trading* de la volatilité 261
- 2 Couverture statique et semi-statique 263
 - 2.1 Décomposition de payoff sur une base de calls et puts 263
 - 2.2 Application aux swaps de variance 265
- 3 Modèle d'Heston 268
 - 3.1 Le modèle 268
 - 3.2 Calcul de la transformée de Fourier 269
 - 3.3 Technique FFT pour le calcul rapide des prix des *calls* 270
- 4 Exercices 272
 - 4.1 Couverture d'un swap de variance à l'aide d'un *call* liquide 272

4.2	Swap de variance pondérée	274
4.3	Couverture de la corrélation stochastique à l'aide d'option sur rendements	275
4.4	Couverture robuste d'option barrière digitale	276
	Index des terminologies	285
	Index des notations	287