Introduction

Ce livre est destiné aux étudiants de M2 en mathématiques appliquées ou en thèse qui souhaitent approfondir les fondements de la finance mathématique et les principaux outils servant à la gestion des risques financiers. Sa lecture nécessite de solides bases en probabilité, notamment en calcul stochastique.

La première partie de cet ouvrage traite des théorèmes fondamentaux d'évaluation d'actif, qui servent de socles à l'évaluation et à la couverture des risques. Nous y expliquons, dans un cadre mathématique très général, comment l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est liée à l'existence de mesures risque neutre, et le rôle que jouent celles-ci dans l'évaluation des produits dérivés.

L'analyse est tout d'abord conduite dans le cadre de modèles en temps discret, plus simples à présenter et à traiter que les modèles en temps continu qui font l'objet du deuxième chapitre. La présence de contraintes de portefeuille est également discutée. Dans tous ces cas, nous verrons que l'absence d'opportunité d'arbitrage ne permet pas de définir un prix de manière unique pour les produits dérivés, sauf si le marché est complet et que les achats et ventes ne sont pas contraints. Il fournit, en revanche, un intervalle de *prix viables*, c'est-à-dire ne conduisant pas à la création d'arbitrage, dont la borne supérieure est le prix de sur-réplication, prix auquel une option doit être vendue pour permettre la mise en place d'une couverture sans risque.

Le dernier chapitre de cette partie est consacré aux problèmes de gestion de portefeuille. Ils sont traités en utilisant une démarche économique classique pour modéliser le choix dans l'incertain qui repose sur l'utilisation de fonction d'utilité. Nous montrons comment l'approche par dualité permet une résolution explicite lorsque le marché est complet. Nous expliquons également comment cette approche permet de déterminer un prix pour les options lorsque le marché est incomplet.

Dans la deuxième partie, nous restreignons l'étude aux modèles markoviens, qui sont ceux utilisés en pratique. Plus précisément, nous supposons que le processus modélisant l'évolution du cours des actifs liquides est donné par la solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien. Le premier chapitre traite de la couverture des produits dérivés dans les marchés complets. Il est alors possible de caractériser le prix d'une option comme solution d'une équation aux dérivées partielles et de montrer que la stratégie de couverture est donnée par la dérivée de ce prix par rapport à la valeur des actifs liquides. C'est ce que l'on appelle la couverture en delta (*delta hedging*).

L'étude est menée pour les principaux types de produits dérivés : options vanilles, à barrière et américaines. D'autres produits dérivés, notamment liés aux taux, font l'objet d'exercices. Nous caractérisons tout d'abord la fonctionnelle de prix en supposant qu'elle est régulière, puis nous faisons appel à la notion de solution de viscosité pour traiter les cas où elle n'est pas suffisamment différentiable. Dans les deux cas, l'équation obtenue est linéaire. Nous présentons également différentes manières de calculer la stratégie de couverture : approche par processus tangent, caractérisation par équation aux dérivées partielles, approche par calcul de Malliavin.

Le chapitre suivant reprend cette analyse dans le cadre de marchés imparfaits : incomplets ou avec contraintes de portefeuille. Nous obtenons une caractérisation du prix de sur-réplication comme solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire. Lorsque l'imperfection de marché est uniquement liée à des contraintes de portefeuille, nous expliquons comment se ramener au cas sans contrainte en modifiant le payoff de l'option. C'est ce que l'on appelle le *face-lifting*. Lorsque l'imperfection est due à une incomplétude, l'équation ne peut être simplifiée. Elle donne toutefois des indications sur la manière dont le risque peut être couvert de manière certaine. Malheureusement, dans certains cas, ceci conduit à un prix de vente si élevé qu'il ne peut être utilisé en pratique. Nous le montrons à travers l'exemple d'un modèle à volatilité stochastique.

Le dernier chapitre de cette deuxième partie porte sur l'étude des problèmes d'évaluation de produit dérivés sous critère de risque. Nous ne cherchons plus un prix permettant de se couvrir sans risque, comme dans le chapitre précédent, mais un prix assurant une couverture satisfaisante au sens d'un critère de risque défini comme l'espérance d'une fonction de perte de la position nette finale. Ce problème a déjà été introduit dans le dernier chapitre de la première partie, mais sans que l'on puisse alors fournir de réponse satisfaisante pour les marchés incomplets. Nous faisons ici appel aux techniques de cible stochastique pour obtenir une caractérisation de la fonction de prix associée comme solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire de type Hamilton-Jacobi-Bellman, qui peut ensuite être résolue numériquement. Ceci procure un outils effectif de calcul du prix là où l'approche par dualité en marché incomplet ne donne qu'un résultat d'existence et de dualité.

La troisième partie est consacrée à la mise en œuvre pratique des stratégies de couverture dans les deux principales classes de modèle utilisées dans l'industrie : volatilité locale et volatilité stochastique. Nous nous intéressons notamment aux problèmes de calibration, à l'impact d'une erreur de modèle sur la qualité de la couverture, à l'effet du rebalancement en temps discret des positions de couverture, et à la mise en place de stratégies de couverture semi-statiques.

Table des matières