

Processus de Poisson et méthodes actuarielles

2015-2016 : Examen. Durée : 2 heures

Sans documents ni calculatrice !

Question de cours

1. Enoncer l'inégalité de Lundberg et indiquer dans quels cas elle est valide.
2. Définir la notion de distribution sous-exponentielle. Donner un critère impliquant qu'une distribution est sous-exponentielle. Donner une propriété nécessairement vérifiée par une distribution sous-exponentielle.
3. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction soit DRI.
4. Enoncer le key renewal théorème.
5. Soit g une fonction $C^1(\mathbb{R})$ et X une variable aléatoire positive telle que $g(X)$ est intégrable. Montrer que

$$\mathbb{E}[g(X)] = g(0) + \int_0^\infty g'(x) \mathbb{P}[X > x] dx.$$

Exercice 1

Soit $N = (N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson de paramètre λ tel que

$$0 < \lambda < 1.$$

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, \lambda]$, indépendante de N .

On considère le modèle de Cramér-Lundberg associé pour un coefficient de charge $c = \frac{\lambda}{2}$. Pour un capital initial $u \geq 0$, on note

$$U_t = u + \frac{1}{2}\lambda t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

le processus de risque associé et $\psi(u) = \mathbb{P}(\exists t \geq 0, U_t < 0)$ la probabilité de ruine.

1. La condition de profit net est-elle réalisée ?

$$\mathbb{E}[\frac{1}{2}\lambda t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i] = \frac{1}{2}\lambda t - \frac{1}{2}\lambda^2 t = \frac{1}{2}\lambda t(1 - \lambda) > 0. \text{ Est vérifié.}$$

Pour $R \geq 0$, on pose

$$f(R) = \mathbb{E}[e^{R(X_1 - cT_1)}] \text{ et } g(R) = \mathbb{E}[e^{RX_1}],$$

où T_1 est le premier temps de saut de N .

2. Montrer que toute solution de l'équation $f(R) = 1$ vérifie aussi

$$g(R) = 1 + \frac{R}{2}.$$

$$\mathbb{E}[e^{-RcT_1}] = \lambda/(\lambda + Rc) = \lambda/(\lambda + R\lambda/2) = 1/(1 + R/2)$$

3. Montrer qu'il existe une solution $R > 0$ à l'équation $f(R) = 1$ et que cette solution est unique.

$$g(R) = \mathbb{E}[e^{RX_1}] = \int_0^\lambda e^{Rx} dx = (e^{R\lambda} - 1)/R. \text{ On doit résoudre } \ell(R) = e^{R\lambda} - (1 + R + R^2/2) = 0. \text{ Or } \ell(0) = 0, \ell'(0) = \lambda - 1 < 0 \text{ et } \ell(\infty) = \infty.$$

Il existe donc une racine strictement positive.

4. On suppose que $\lambda \leq 1/2$. Montrer que g est convexe et que $g'(\frac{1}{2\lambda}) < \frac{1}{2}$. (On donne l'approximation $\exp(\frac{1}{2}) \approx 1,65$.)

$$g \text{ est convexe car la fonction exponentielle est convexe. } g'(R) = \lambda e^{R\lambda}/R - e^{R\lambda}/R^2 + 1/R^2 \text{ donc } g'(\frac{1}{2\lambda}) = 2\lambda^2 e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}} 4\lambda^2 + 4\lambda^2 \simeq 2\lambda^2 0.35 \leq \frac{1}{2} 0.35.$$

5. En déduire (toujours lorsque $\lambda \leq 1/2$) que

$$\psi(u) \leq \exp\left(-\frac{u}{2\lambda}\right).$$

Ceci implique que la solution > 0 de $g(R) = 1 + \frac{R}{2}$ est supérieure à $1/2$. On applique ensuite l'inégalité de Lundberg.

Exercice 2

On étudie le remplacement préventif d'un matériel susceptible de tomber en panne. La durée de vie du matériel est une variable aléatoire X positive de fonction de répartition F (on suppose $F > 0$ sur \mathbb{R}^* et F continue).

Le remplacement préventif consiste à renouveler le matériel dès qu'il tombe en panne ou bien dès qu'il a dépassé une durée de vie de bon fonctionnement $a > 0$.

1. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $\{X \leq a\}$ a pour fonction de répartition

$$G_a(t) = \frac{F(t)}{F(a)} \text{ si } t \leq a \text{ et } G_a(t) = 1 \text{ sinon.}$$

$$\mathbb{P}[X \leq t | X \leq a] = \mathbb{P}[X \leq t \wedge a] / \mathbb{P}[X \leq a].$$

2. Soit $X^{(a)}$ une v. a. de fonction de répartition G_a . Montrer que $\mathbb{E}[X^{(a)}] = F(a)^{-1} \int_0^a x dF(x)$.

$$\mathbb{E}[X^{(a)}] = \int_0^\infty (1 - G_a(t)) dt = \int_0^a \frac{F(a) - F(t)}{F(a)} dt = F(a)^{-1} \int_0^a x dF(x)$$

3. Soit T le premier instant de remplacement préventif effectif¹. On utilise la convention $\sum_{i=1}^0 X_i^{(a)} = 0$. Montrer que T s'écrit

$$T = a + \sum_{i=1}^N X_i^{(a)}$$

où les $X_i^{(a)}$ sont i.i.d., de même loi que $X^{(a)}$, et N est une v. a.² de loi

$$\mathbb{P}(N = k) = F(a)^k (1 - F(a)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Soit N le nbre de machines tombant en panne avant d'avoir une durée de vie a . $\mathbb{P}[N = k] = F(a)^k (1 - F(a))$.

4. Montrer que

$$\mathbb{E}[T] = a + \frac{\int_0^a x dF(x)}{(1 - F(a))}.$$

1. c'est-à-dire le premier instant où l'on remplace le matériel immédiatement après une durée de vie a alors qu'il est encore en bon fonctionnement.

2. On pourra admettre que N est indépendante des $X_i^{(a)}$.

$$\mathbb{E}[T] = a + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i^{(a)}\right] = a + \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X^{(a)}] = a + (1 - F(a))^{-1} \mathbb{E}[X^{(a)}]$$

5. On note H la fonction de répartition de $T - a$. Montrer que

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i^{(a)} \leq t\right) \mathbb{P}(N = n).$$

Par conditionnement sur N .

6. Utiliser la relation précédente pour montrer que H est solution de

$$H(t) = (1 - F(a)) + F(a) \int_0^t H(t - x) dG_a(x).$$

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i^{(a)} \leq t\right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=2}^n X_i^{(a)} \leq t - X_1^{(a)}\right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= (1 - F(a)) + F(a) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{X}_i^{(a)} \leq t - X_1^{(a)}\right) \mathbb{P}(N = n - 1) \end{aligned}$$

7. Montrer que pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-sT}] = se^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-st} H(t) dt = \frac{(1 - F(a))}{1 - F(a) \mathbb{E}[e^{-sX^{(a)}}]} e^{-sa}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [e^{-s(T-a)}] &= 1 - \int_0^\infty (se^{-st}(1 - H(t)))dt \\
&= s \int_0^\infty e^{-st}H(t)dt \\
&= s \int_0^\infty e^{-st}(1 - F(a))dt + s \int_0^\infty e^{-st}F(a) \int_0^t H(t-x)dG_a(x)dt \\
&= (1 - F(a)) + sF(a) \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-st}H(t-x)dtdG_a(x) \\
&= (1 - F(a)) + sF(a) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t+x)}H(t)dtdG_a(x) \\
&= (1 - F(a)) + F(a) \int_0^\infty e^{-sx} \mathbb{E} [e^{-s(T-a)}]dG_a(x) \\
&= (1 - F(a)) + F(a) \mathbb{E}[e^{-sX^{(a)}}] \mathbb{E} [e^{-s(T-a)}] \\
&= (1 - F(a)) + F(a) \mathbb{E}[e^{-sX^{(a)}}] \mathbb{E} [e^{-s(T-a)}]
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E} [e^{-s(T-a)}] = \frac{(1 - F(a))}{1 - F(a) \mathbb{E}[e^{-sX^{(a)}}]}$$