

Processus de Poisson et méthodes actuarielles

2015-2016 : Examen de rattrapage. Durée : 2 heures

Sans documents ni calculatrice !

Il sera tenu grand compte de la présentation et de la rédaction. On pourra rédiger sa copie indifféremment en Anglais ou en Français. Une version anglaise du sujet suit la version française.

Exercice 1

Soit $N = (N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

une fonction borélienne localement bornée. On pose

$$N(f)_t = \sum_{i \geq 1} f(T_i) \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}} \text{ pour } t \geq 0,$$

où les $(T_i)_{i \geq 1}$ sont les instants de saut de N .

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $N(f)_t < \infty$ presque-sûrement.

CORRECTION SUCCINCTE :

On a $N(f)_t = \sum_{i=1}^{N_t} f(T_i) \leq \sup_{x \in [0, t]} f(x) N_t < \infty$ car f est bornée sur les compacts et N est un processus de Poisson qui vérifie en particulier $N(f)_t < \infty$ presque-sûrement.

2. Si $f(s) = \mathbf{1}_{(a, b]}(s)$ où $[a, b] \subset [0, t]$, quelle est la loi de $N(\mathbf{1}_{(a, b]})_t$?

CORRECTION SUCCINCTE :

$N(\mathbf{1}_{(a, b]})_t = \sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{1}_{a < T_i \leq b} = N_b - N_a \sim \mathcal{P}(\lambda(b - a))$ où $\mathcal{P}(\mu)$ désigne la loi de Poisson de paramètre μ .

3. Quelle est¹ la loi conditionnelle de (T_1, \dots, T_n) sachant $N_t = n$?

CORRECTION SUCCINCTE :

C'est la loi de la statistique d'ordre de n variables uniformes sur $[0, t]$ indépendantes.

4. Montrer que pour $u \geq 0$ on a

$$\mathbb{E} [e^{-uN(f)_t} | N_t = n] = \frac{1}{t^n} \left(\int_0^t e^{-uf(s)} ds \right)^n.$$

CORRECTION SUCCINCTE :

Si (U_1, \dots, U_n) désigne une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$ et $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ leur statistique d'ordre, c'est-à-dire leur réarrangement croissant (défini p.s.), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-uN(f)_t} | N_t = n] &= \mathbb{E} [e^{-u \sum_{i=1}^n f(T_i)} | N_t = n] \\ &= \mathbb{E} [e^{-u \sum_{i=1}^n f(U_{(i)})}] \quad (\text{question précédente}) \\ &= \mathbb{E} [e^{-u \sum_{i=1}^n f(U_i)}] \quad (\text{symétrie de } (t_1, \dots, t_n) \mapsto e^{-u \sum_{i=1}^n f(t_i)}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [e^{-uf(U_i)}] \quad (\text{indépendance des } U_i) \\ &= \left(\frac{1}{t} \int_0^t e^{-uf(s)} ds \right)^n. \end{aligned}$$

5. En déduire $\mathbb{E} [e^{-uN(f)_t}]$ et retrouver le résultat de la Question 2.

CORRECTION SUCCINCTE :

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-uN(f)_t}] &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} [e^{-uN(f)_t} | N_t = n] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t e^{-uf(s)} ds \right)^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \exp \left(\lambda \int_0^t e^{-uf(s)} ds - \lambda t \right) \\ &= \exp \left(\lambda \int_0^t (e^{-uf(s)} - 1) ds \right). \end{aligned}$$

¹On ne demande pas de redémontrer le résultat.

En particulier

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [e^{-uN(\mathbf{1}_{(a,b]})t}] &= \exp \left(\lambda \int_0^t (e^{-u\mathbf{1}_{(a,b]}(s)} - 1) ds \right) \\ &= \exp \left(\lambda(b-a)(e^{-u} - 1) \right)\end{aligned}$$

car $e^{-u\mathbf{1}_{(a,b]}(s)} - 1 = e^{-u}\mathbf{1}_{(a,b]}(s)$, et on reconnait la transformée de Laplace d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda(b-a)$.

6. Calculer $\mathbb{E} [N(f)_t]$.

CORRECTION SUCCINCTE :

La variable $N(f)_t$ est intégrable et en intégrant sous le signe somme, $\mathbb{E} [N(f)_t] = \left(-\frac{d}{du} \mathbb{E} [e^{-uN(f)_t}] \right)_{u=0}$. Posons $\varphi(u) = \exp \left(\lambda \int_0^t (e^{-uf(s)} - 1) ds \right)$. On a $\varphi(0) = 1$ et

$$\varphi'(u) = -\lambda \int_0^t f(s) e^{-uf(s)} ds \varphi(u),$$

d'où

$$\mathbb{E} [N(f)_t] = \lambda \int_0^t f(s) ds.$$

7. Calculer $\text{Var}[N(f)_t]$.

CORRECTION SUCCINCTE :

$N(f)_t$ admet un moment d'ordre 2 et on a de même en intégrant sous le signe somme $\mathbb{E}[N(f)_t^2] = \left(\frac{d^2}{du^2} \varphi(u) \right)_{u=0}$. On a

$$\varphi''(u) = \lambda \int_0^t f(s)^2 e^{-uf(s)} ds \varphi(u) + \left(\lambda \int_0^t f(s) e^{-uf(s)} ds \right)^2 \varphi(u),$$

d'où $\mathbb{E}[N(f)_t^2] = \lambda \int_0^t f(s)^2 ds + \left(\lambda \int_0^t f(s) ds \right)^2$ et finalement

$$\text{Var}[N(f)_t] = \lambda \int_0^t f(s)^2 ds.$$

Exercice 2

Soit $(\xi_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., ayant un moment d'ordre 2, indépendantes du processus de Poisson $N = (N_t, t \geq 0)$ d'intensité $\lambda > 0$. Pour $t \geq 0$, on pose²

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i.$$

1. Montrer que $t^{-1}X_t$ converge presque-sûrement lorsque $t \rightarrow \infty$ vers une limite que l'on identifiera.

CORRECTION SUCCINCTE :

On a

$$\frac{X_t}{t} = \frac{N_t}{t} \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i.$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $N_t \rightarrow \infty$ p.s. donc par la loi forte des grands nombres, on a $\frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \rightarrow \mu$ p.s. De même, par la loi forte des grands nombres pour le processus de Poisson, on a $\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda$ p.s. lorsque $t \rightarrow \infty$. D'où $\frac{X_t}{t} \rightarrow \lambda\mu$ p.s.

On pose $\mu = \mathbb{E}[\xi_1]$. Pour $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$, soit

$$G_n(u) = \mathbb{E} \left[\exp \left(iu \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu) \right) \right] \text{ et } G_0(u) = 1.$$

2. Montrer que $G_n(u)$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une limite que l'on identifiera.

CORRECTION SUCCINCTE :

On a $G_n(u) \rightarrow \exp(-\frac{\sigma^2 u^2}{2})$ en appliquant le T.C.L., où σ^2 désigne la variance commune des ξ_i .

On pose³, pour $t \geq 0$

$$M_t = \sqrt{N_t} \left(\frac{X_t}{N_t} - \mu \right).$$

²En convenant $X_t = 0$ sur $\{N_t = 0\}$.

³En convenant $M_t = 0$ sur $\{N_t = 0\}$.

3. Montrer que

$$\mathbb{E} [e^{iuM_t}] = \mathbb{E}[G_{N_t}(u)].$$

CORRECTION SUCCINTE :

On a

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{N_t}} \sum_{i=1}^{N_t} (\xi_i - \mu),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{iuM_t}] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(iu \frac{1}{\sqrt{N_t}} \sum_{i=1}^{N_t} (\xi_i - \mu) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(iu \frac{1}{\sqrt{N_t}} \sum_{i=1}^{N_t} (\xi_i - \mu) \right) \mid N_t \right] \right]. \end{aligned}$$

Par indépendance entre les ξ_i et N , on a

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(iu \frac{1}{\sqrt{N_t}} \sum_{i=1}^{N_t} (\xi_i - \mu) \right) \mid N_t = n \right] = G_n(u),$$

d'où le résultat.

4. En déduire que M_t converge en loi lorsque $t \rightarrow \infty$ vers une loi limite que l'on identifiera.

CORRECTION SUCCINTE :

On a $N_t \rightarrow \infty$ p.s. donc $G_{N_t}(u) \rightarrow \exp(-\frac{\sigma^2 u^2}{2})$ p.s. d'après la question 2. De plus $|G_{N_t}(u)| \leq 1$. Par convergence dominée, on en déduit

$$\mathbb{E}[G_{N_t}(u)] \rightarrow \exp(-\frac{\sigma^2 u^2}{2})$$

et M_t converge en loi vers la loi normale de moyenne 0 et de variance σ^2 .

5. Montrer que

$$\sqrt{t} \left(\frac{X_t}{t} - \mu \frac{N_t}{t} \right)$$

converge en loi lorsque $t \rightarrow \infty$ vers une loi limite que l'on identifiera.

CORRECTION SUCCINTE :

On a $\sqrt{\frac{N_t}{t}} \rightarrow \sqrt{\lambda}$ p.s. par la loi des grands nombres pour le processus

de Poisson. On a $M_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Donc le produit (Slutsky par exemple) converge en loi vers la loi $\sqrt{\lambda} \mathcal{N}(0, \sigma^2) = \mathcal{N}(0, \lambda \sigma^2)$. On conclut en remarquant que

$$\sqrt{t} \left(\frac{X_t}{t} - \mu \frac{N_t}{t} \right) = \sqrt{\frac{N_t}{t}} M_t.$$

Exercice 3

Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ un processus de renouvellement et $(N_t)_{t \geq 0}$ sa fonction de comptage. On suppose que la loi commune des interarrivées possède une densité f sur \mathbb{R} (valant 0 sur $(-\infty, 0]$). Pour $n \geq 1$, on note f_n la densité de T_n et F_n sa fonction de répartition.

1. Vérifier que $f_1(t) = f(t)$ et montrer que

$$f_{n+1}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t-s)f(s)ds.$$

CORRECTION SUCCINTE :

On a $T_n = \tau_1 + \dots + \tau_n$, où les τ_i sont i.i.d. de densité f . Donc $T_1 = \tau_1$ et $f_{T_1} = f$. Si φ est une fonction test (positive, intégrable, bornée), on a, en écrivant $T_{n+1} = T_n + \tau_n$ avec T_n et τ_n indépendants et de densité respectives f_{T_n} et f ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\varphi(T_{n+1})] &= \mathbb{E} [\varphi(T_n + \tau_n)] \\ &= \int \int \varphi(u+s) f_{T_n}(u) f(s) ds du \\ &= \int \varphi(t) \left(\int f_{T_n}(t-s) f(s) ds \right) dt \end{aligned}$$

en faisant $u+s=t$ d'où le résultat.

On définit $r(t) = \mathbb{E}[N_t]$ si $t \geq 0$ et $r(t) = 0$ pour $t < 0$.

2. Montrer que $r(t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$. CORRECTION SUCCINTE :
On a

$$r(t) = \mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T_n \leq t).$$

3. Montrer que pour $n \geq 2$ on a $\mathbb{P}(T_n \leq t | T_1) = F_{n-1}(t - T_1)$.

CORRECTION SUCCINCTE :

On a

$$\begin{aligned} P(T_n \leq t | T_1) &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{T_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \leq t\}} | T_1] \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau_2 + \dots + \tau_n \leq t - T_1\}} | T_1] \\ &= \left(\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau_2 + \dots + \tau_n \leq t - s\}}] \right)_{s=T_1} \text{ indépendance entre } T_1 \text{ et } \tau_2 + \dots + \tau_n \\ &= F_{n-1}(t - T_1). \end{aligned}$$

4. Montrer que r satisfait l'équation de renouvellement

$$r(t) = F(t) + \int_0^t r(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0$$

où F désigne la fonction de répartition de la loi commune des interarrivées.

CORRECTION SUCCINCTE :

En sommant pour $n \geq 2$ puis en prenant l'espérance dans l'égalité précédente, on a

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 2} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} | T_1 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 2} F_{n-1}(t - T_1) \right].$$

Le membre de gauche est égal à $r(t) - \mathbb{P}(T_1 \leq t) = r(t) - F(t)$. Le membre de droite vaut

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 2} F_{n-1}(t-s)f(s)ds = \int_0^t \sum_{n \geq 1} F_n(t-s)f(s)ds = \int_0^t r(t-s)f(s)ds$$

car $F_{n-1}(u) = 0$ si $u \leq 0$, d'où le résultat.

English version

Exercise 1

Let $N = (N_t, t \geq 0)$ be a standard Poisson process with intensity $\lambda > 0$. Let

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

be a locally bounded Borel function. Set

$$N(f)_t = \sum_{i \geq 1} f(T_i) \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}} \quad \text{for } t \geq 0,$$

where the $(T_i)_{i \geq 1}$ are the jump times of N .

1. Show that for all $t \geq 0$ we have $N(f)_t < \infty$ almost-surely.
2. If $f(s) = \mathbf{1}_{(a,b]}(s)$ where $[a, b] \subset [0, t]$, what is the distribution of $N(\mathbf{1}_{(a,b]})_t$?
3. What is⁴ the conditional law of (T_1, \dots, T_n) given $N_t = n$?
4. Show that for $u \geq 0$, we have

$$\mathbb{E} [e^{-uN(f)_t} | N_t = n] = \frac{1}{t^n} \left(\int_0^t e^{-uf(s)} ds \right)^n.$$

5. Derive $\mathbb{E} [e^{-uN(f)_t}]$ and find back the result of Question 2.
6. Compute $\mathbb{E} [N(f)_t]$.
7. Compute $\text{Var}[N(f)_t]$.

Exercise 2

Let $(\xi_i, i \geq 1)$ be a sequence of i.i.d. real-valued random variables, with second-order moments, independent of the Poisson process $N = (N_t, t \geq 0)$ with intensity $\lambda > 0$. For $t \geq 0$, we set⁵

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i.$$

⁴It is not required to prove the result.

⁵Putting $X_t = 0$ on $\{N_t = 0\}$.

1. Show that $t^{-1}X_t$ converges almost surely as $t \rightarrow \infty$ and identify its limit.

We set $\mu = \mathbb{E}[\xi_1]$. For $n \geq 1$ and $u \in \mathbb{R}$, let

$$G_n(u) = \mathbb{E} \left[\exp \left(iu \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu) \right) \right] \text{ and } G_0(u) = 1.$$

2. Show that $G_n(u)$ converges as $n \rightarrow \infty$ and identify its limit.

We set⁶, for $t \geq 0$

$$M_t = \sqrt{N_t} \left(\frac{X_t}{N_t} - \mu \right).$$

3. Show that

$$\mathbb{E} [e^{iuM_t}] = \mathbb{E}[G_{N_t}(u)].$$

4. Derive that M_t converges in distribution as $t \rightarrow \infty$ and identify its limit.
5. Show that

$$\sqrt{t} \left(\frac{X_t}{t} - \mu \frac{N_t}{t} \right)$$

converges in distribution as $t \rightarrow \infty$ and identify its limit.

Exercise 3

Let $(T_n)_{n \geq 1}$ be a renewal process and let $(N_t)_{t \geq 0}$ denote its counting function. We assume that the common law of the interarrival times admits a density function f on \mathbb{R} (with value 0 on $(-\infty, 0]$). For $n \geq 1$, we denote by f_n the density function of T_n and F_n its cumulative distribution function.

1. Check that $f_1(t) = f(t)$ and show that

$$f_{n+1}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t-s)f(s)ds.$$

Define $r(t) = \mathbb{E}[N_t]$ if $t \geq 0$ and $r(t) = 0$ for $t < 0$.

⁶Putting $M_t = 0$ on $\{N_t = 0\}$.

2. Show that $r(t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$.
3. Show that for $n \geq 2$ we have $\mathbb{P}(T_n \leq t \mid T_1) = F_{n-1}(t - T_1)$.
4. Show that r satisfies the renewal equation

$$r(t) = F(t) + \int_0^t r(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0$$

wher F denotes the cumulative distribution fcuntion of the common interar-rival times.