

Poisson process and actuarial sciences
Mid term exam (2015-2016)
March 16, 2016

The quality of the redaction will be taken into account. Be clear and concise in your answers.

Questions. [Answer in maximum 3 lines] (5 points)

1. Give the definition of a standard counting process.
2. What is a renewal process ?
3. What are the properties of the increments of a mixed Poisson process ?
4. What is the Markov property for a Poisson process ? What does it mean ?
5. What is the law of the first n jump times of a Poisson process N given that $N_t = n$?

In the following problem, most of the questions can be answered independently but results from the previous ones (given in the text) will often be useful. You can therefore skip the questions you can not answer, but read all of them !

Problem.(19 points) The number of vehicles entering a roundabout (*rond point*) is modeled by a Poisson process N of parameter $\lambda > 0$. Namely, N_t is the number of vehicles that have entered the roundabout during the first t minutes. The corresponding sequence of jump times is $(T_i)_{i \geq 1}$.

1. Given that exactly ℓ vehicles entered the roundabout within the first t minutes, give the probability that at least k vehicles have entered the roundabout within the first s minutes, with $\ell \geq k$ and $t > s$. Express the result in terms of s, t, ℓ and k . Show that it can be interpreted in terms of a binomial distribution.
2. Because of works on the roundabout, its access will be closed during a time duration of h minutes starting from time t_o . Vehicles will still arrive according to N but will have to queue and wait. We want to ensure that the maximal number of vehicles queuing is strictly less than $K \geq 1$ with probability $p \in (0, 1)$.
 - (a) What is the probability that a vehicle arrives exactly at time t_o ?
 - (b) Set

$$\tilde{\delta}_i := T_{N_{t_o}+i} - (T_{N_{t_o}+i-1}1_{\{i \geq 2\}} + t_o 1_{\{i=1\}}).$$

Show that $\tilde{\delta}_1$ is distributed according to an exponential distribution of parameter λ . Then, show that $(\tilde{\delta}_i)_{i \geq 1}$ is an iid sequence, by induction.

(c) Set

$$\tilde{T}_n := \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i \quad \text{and} \quad \tilde{N}_t := \sum_{i \geq 1} 1_{\{\tilde{T}_i \leq t\}}.$$

Justify that \tilde{N} is a Poisson process with parameter λ .

- (d) Provide a condition in terms of element(s) of $(\tilde{T}_n)_{n \geq 1}$ ensuring that the maximal number of vehicles queuing on the time interval $[t_o, t_o + h]$ is strictly less than $K \geq 1$ with probability (at least) $p \in (0, 1)$.
- (e) How can we approximate the maximal possible duration h by simply using the quantiles of the Gaussian distribution if K is large ?
- (f) Explain why a good approximation of the number of vehicles queuing is $h\lambda$ if h is large.

3. We now assume that the size of the vehicles arriving at the roundabout is given by a sequence of iid random variable $(\xi_i)_{i \geq 1}$. Namely, ξ_i is the size of the vehicles arriving at time T_i . We assume that $(\xi_i)_{i \geq 1}$ is independent of N . We set

$$\tilde{\xi}_i = \xi_{N_{t_o} + i}.$$

- (a) Show that $(\tilde{\xi}_i)_{i \geq 1}$ is an iid sequence independent of N_{t_o} , with the same law as $(\xi_i)_{i \geq 1}$.
- (b) Given two bounded functions f and g , and $k, \ell \in \mathbb{N}$, show that

$$\mathbb{E}[f(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k)g(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_\ell)] = \mathbb{E}[f(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k)]\mathbb{E}[g(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_\ell)],$$

and deduce that $(\tilde{\xi}_i)_{i \geq 1}$ is independent of \tilde{N} .

- (c) Set $m := \mathbb{E}[\xi_1]$. The total length of the queue is given by the process

$$\tilde{S}_t = \sum_{i \geq 1} \tilde{\xi}_i 1_{\tilde{T}_i \leq t}.$$

Show that \tilde{S} is a compound Poisson process of parameter λ . What is the expected queue length after h minutes ?

- (d) What is the a.s. limit of \tilde{S}_h/h as $h \rightarrow \infty$.

4. We finally discuss approximations in the case $\lambda \rightarrow \infty$. From now on, we write \tilde{N}^λ and \tilde{S}^λ for \tilde{N} and \tilde{S} to insist on the fact that they depend on λ .

- (a) Let M be a Poisson process with intensity $\gamma > 0$. Given $c > 0$, show that $\bar{M} := (M_{ct})_{t \geq 0}$ is a Poisson process with intensity $c\gamma$.
- (b) Deduce from the above that $\tilde{S}_h^\lambda/\lambda$ converges a.s. as $\lambda \rightarrow \infty$ and identify the limit.
- (c) Assume that $\sigma := \text{var}[\xi_1]^{\frac{1}{2}} < \infty$. What can we say about $\sqrt{\tilde{N}_h^\lambda}(\tilde{S}_h^\lambda/\tilde{N}_h^\lambda - m)$ as $\lambda \rightarrow \infty$?

Processus de Poisson et méthodes actuarielles
Examen partiel (2015-2016)
16 mars, 2016

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction. Soyez clair et concis.

Questions. [Répondre en 3 lignes maximum] (5 points)

1. Donner la définition d'un processus de comptage.
2. Qu'est-ce qu'un processus de renouvellement ?
3. Quelles sont les propriétés des accroissements d'un processus de Poisson mixte ?
4. Qu'est-ce que la propriété de Markov d'un processus de Poisson ? Que signifie-t-elle ?
5. Quelle est la loi des n premiers temps de saut d'un processus de Poisson N sachant que $N_t = n$?

Dans le problème qui suit, vous pouvez répondre à la plupart des questions sans avoir résolu les précédentes, mais vous aurez très certainement besoin des réponses qui sont données au fur et à mesure du texte. Vous pouvez donc sauter des questions, mais lisez tout le texte !

Problem.(19 points) Le nombre de véhicules qui arrivent à un rond-point est modélisé par un processus de Poisson N d'intensité $\lambda > 0$. Plus précisément, N_t est le nombre de véhicules qui sont entrés dans le rond-point durant les t premières minutes. La suite des temps de saut associée est $(T_i)_{i \geq 1}$.

1. Sachant qu'exactly ℓ véhicules sont entrés dans le rond-point pendant les t premières minutes, donnez la probabilité qu'au moins k véhicules soient entrés dans le rond-point pendant les s premières minutes, avec $\ell \geq k$ et $t > s$. Exprimez le résultat en fonction de s, t, ℓ et k . Montrez que l'on peut l'interpréter en termes de loi binomiale.
2. Du fait de travaux sur le rond-point, son accès va être fermé pendant h minutes à partir de la date t_o . Les véhicules arriveront toujours selon le processus N mais devront faire la queue et attendre. On veut s'assurer que le nombre de véhicules en attente est strictement inférieur à $K \geq 1$ avec probabilité $p \in (0, 1)$.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'un véhicule arrive exactement à la date t_o ?
 - (b) Soit

$$\tilde{\delta}_i := T_{N_{t_o}+i} - (T_{N_{t_o}+i-1}1_{\{i \geq 2\}} + t_o 1_{\{i=1\}}).$$

Montrez que $\tilde{\delta}_1$ suit une loi exponentielle de paramètre λ . Ensuite, montrez que $(\tilde{\delta}_i)_{i \geq 1}$ est une suite iid, par induction.

(c) Soient

$$\tilde{T}_n := \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i \quad \text{and} \quad \tilde{N}_t := \sum_{i \geq 1} 1_{\{\tilde{T}_i \leq t\}}.$$

Justifiez que \tilde{N} est un processus de Poisson de paramètre λ .

- (d) Donnez une condition en fonction d'élément(s) de $(\tilde{T}_n)_{n \geq 1}$ qui assure que le nombre maximal de véhicules faisant la queue sur l'intervalle de temps $[t_o, t_o + h]$ est strictement inférieur à $K \geq 1$ avec probabilité au moins égale à $p \in (0, 1)$.
- (e) Comment peut-on approximer le temps maximal h en utilisant simplement les quantiles de la loi normale quand K est grand ?
- (f) Expliquez pourquoi une bonne approximation du nombre de véhicules est $h\lambda$ si h est grand.
3. On suppose maintenant que la taille des véhicules arrivant sur le rond-point est donnée par une suite iid $(\xi_i)_{i \geq 1}$. Plus précisément, ξ_i est la taille du véhicule qui arrive en T_i . On suppose $(\xi_i)_{i \geq 1}$ indépendante de N . On définit

$$\tilde{\xi}_i = \xi_{N_{t_o} + i}.$$

- (a) Montrez que $(\tilde{\xi}_i)_{i \geq 1}$ est une suite iid indépendante de N_{t_o} , et qui a la même loi que $(\xi_i)_{i \geq 1}$.
- (b) Etant données deux fonctions bornées f et g , et deux entiers $k, \ell \in \mathbb{N}$, montrez que
- $$\mathbb{E}[f(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k)g(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_\ell)] = \mathbb{E}[f(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k)]\mathbb{E}[g(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_\ell)],$$
- et en déduire que $(\tilde{\xi}_i)_{i \geq 1}$ est indépendante de \tilde{N} .
- (c) Soit $m := \mathbb{E}[\xi_1]$. La longueur totale de la file d'attente est

$$\tilde{S}_t = \sum_{i \geq 1} \tilde{\xi}_i 1_{\tilde{T}_i \leq t}.$$

Montrez que \tilde{S} est un processus de Poisson composé d'intensité λ . Qu'elle est l'espérance de la longueur de la file d'attente formée après h minutes ?

- (d) Quelle est la limite presque sûre de \tilde{S}_h/h quand $h \rightarrow \infty$.
4. On discute enfin le comportement de cette file quand $\lambda \rightarrow \infty$. A partir de maintenant on utilise les notations \tilde{N}^λ et \tilde{S}^λ pour \tilde{N} et \tilde{S} afin d'insister sur le fait que ces quantités dépendent de λ .
- (a) Soit M un processus de Poisson d'intensité $\gamma > 0$. Etant donné $c > 0$, montrez que $\bar{M} := (M_{ct})_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $c\gamma$.
- (b) En déduire que $\tilde{S}_h^\lambda/\lambda$ converge presque sûrement quand $\lambda \rightarrow \infty$ et donnez sa limite.
- (c) On suppose que $\sigma := \text{var}[\xi_1]^{\frac{1}{2}} < \infty$. Que peut-on dire sur $\sqrt{\tilde{N}_h^\lambda}(\tilde{S}_h^\lambda/\tilde{N}_h^\lambda - m)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$?