Exercices de Colles - Niveau MP*

Emeric Bouin

25 septembre 2011

1 Algèbre linéaire de première année.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base duale, lorsque :

1. $f_i(P) = P(x_i)$, où $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires distincts.
2. $f_i(P) = P^{(i)}(0)$,
3. $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$ (ne pas chercher la base duale).

Exercice 2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{L}(E \times F)$ et $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(F)$ sont ils isomorphes ?

Exercice 3. Quelle est la dimension de l'intersection de deux hyperplans génériques ?

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires $f_i = \int_{-1}^1 t^i P(t) dt$. Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^* et en trouver la base duale.

Exercice 5. *Un peu de dualité.*

1. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \varphi((X - a)P) = 0.$$

Décrire φ .

2. De même pour φ vérifiant : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \varphi((X - a)^2 P) = 0$.
3. $P \rightarrow P(a), P \rightarrow P(b), P \rightarrow P(c), P \rightarrow \int_a^b P(t) dt$ sont elles libres sur $\mathbb{R}_2[X]$, sur $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 6. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension infinie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{Ker}(f)$ est de dimension finie. Montrer que la suite $d_n = \dim(\text{ker}(f^{(n)}))$ est définie et affine à partir d'un certain rang.

Exercice 8. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ des bases de $\mathbb{R}_n$.

1. Montrer l'existence de $i \in [1, n]$ tel que si on échange e_1 et f_i dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on obtient encore deux bases.
2. Soit $k \in [1, n]$; existe-t-il dans $[1, n]$ des éléments distincts $i_1, i_2, \dots, i_k$ tels que, échangeant $e_1, e_2, \dots, e_k$ avec $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}$, on obtient encore des bases ?

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $f, g \in E^*$. Montrer que si $\text{Ker} f = \text{Ker} g$ alors f et g sont proportionnelles.
2. Soit $g, f_1, \dots, f_n \in E^*$. Montrer que si $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker} f_i \subset \text{Ker} g$ alors g est combinaison linéaire des f_i .

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ formant une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\det f_i(x_j) \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Exercice 11. Matrices à diagonale dominante.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in 1, \dots, n, a_{i,j} \geq 0,$$

et

$$\forall i \in 1, \dots, n, |a_{i,i}| > \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$
2. $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$
3. $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$
4. $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
5. $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^*, f^{p_x}(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent et donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 14. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Donner le rang de $f \rightarrow u \circ f \circ v$.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f) \iff \begin{cases} f^2 = 0 \\ \exists v \in \mathcal{L}(E), \quad h \circ f + f \circ h = id_E \end{cases}.$$

Exercice 16. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercice 17. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ f = 0$. Montrer :

$$\exists g, h \in \mathcal{L}(E), \quad \begin{cases} f = g \circ h \\ h \circ g = 0 \end{cases}.$$

Exercice 18. Soient p et q des projecteurs tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur et décrire son noyau et son image.

Exercice 19. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ puis que $\text{rg}(f) = \text{rg}(g)$.

Exercice 20. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie. On définit ϕ par :

$$\phi(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ f \circ g^{-1}, \quad f \in \mathcal{L}(E).$$

Montrer que $\text{Tr}(\phi) \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Dans un espace vectoriel de dimension finie, on considère n vecteurs formant une famille de rang r . On en extrait p , ces vecteurs formant une famille de rang s . Montrer l'inégalité :

$$r \leq s - p + n.$$

Exercice 22. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \text{Tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

Exercice 23. Soient $u_1, \dots, u_n$ n nilpotents qui commutent dans un espace vectoriel de dimension n . Que vaut $u_1 \circ \dots \circ u_n$?

Exercice 24. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$, avec E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n . On note E^G l'ensemble des éléments invariants sous l'action de G ($g, x \rightarrow g \cdot x$). Montrer alors que :

$$|E^G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g).$$

Exercice 25. Que dire d'un endomorphisme qui stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension k d'un espace vectoriel de dimension n , ou k est fixé dans $[[1, n-1]]$?

Exercice 26. *Formule du complément de Schur.*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ écrite par blocs sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}.$$

On suppose de plus que $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer la formule du complément de Schur :

$$\det(A) = \det(B) \det(E - CB^{-1}D).$$

2 Convergences simple et uniforme.

Exercice 27. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ sur $[0, 1]$.

1. Trouver la limite simple,
2. Y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 28. On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$, définies sur $[0, 1]$.

1. Limite simple et uniforme de f_n ?
2. Que dire pour g_n ?

Exercice 29. Convergence simple et uniforme de $f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{(1+\frac{1}{p})}}$.

Exercice 30. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes P_n qui CVU vers f telle que P'_n CVU vers f' .

2. Si f est $\mathcal{C}^\infty$, peut-on trouver une suite de polynômes P_n telle que pour tout k , $P_n^{(k)}$ CVU vers $f^{(k)}$.

Exercice 31. Soit $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues, convergeant vers f continue, et x_n une suite de D , convergeant vers x dans D .

1. Si f_n CVU, montrer que $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.
2. Contre exemple s'il n'y a que CVS.

Exercice 32. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème de Cauchy

$$(P_n) : \begin{cases} (1 + \frac{1}{n}) y'' - (2 + \frac{1}{n}) y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} .$$

1. Calculer y_n .
2. Montrer que y_n converge simplement vers une fonction y que l'on précisera.
3. Montrer que y vérifie le problème de Cauchy (P_∞) , et le vérifier par le calcul.

Exercice 33. Soit f_n une suite de fonctions qui converge uniformément sur $]0, 1[$. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 34. Soit X, Y des parties d'un evn et f_n une suite de fonctions de X dans Y qui vérifient :

$$\forall x \in X, \quad \forall (u_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad u_n \rightarrow x \Rightarrow \exists l \in Y, \quad f_n(u_n) \rightarrow l.$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f .
2. Montrer que f est continue.
3. On suppose X compact. Montrer que la convergence de f_n est uniforme.

Exercice 35. Soit h une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit limite uniforme d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Exercice 36. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles k -lipschitziennes sur $[0, 1]$ et telles que f_n converge simplement. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 37. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme défini par $P_n(x) = a_n(1 - X^2)^n$, où a_n est tel que $\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 1$. Soit enfin f continue à support dans $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

1. Calculer a_n .
2. Soit $x \in [0, 1], q_n(x) = \int_{-1}^1 P_n(t) f(x - t) dt$. Montrer que q_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
3. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass.

Exercice 38. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $M_k(f) = \int_0^1 t^k f(t) dt$, où f est une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que f est identiquement nulle si et seulement si M_k est nul pour tout k .

Exercice 39. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et f_n la suite de fonctions définies par $f_n = f^{(n)}$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction ϕ . Que dire de ϕ ?

Exercice 40. Soit (f_n) une suite de fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f_n converge uniformément vers f . Que dire de f ?

Exercice 41. Soit (P_n) une suite de polynômes telle qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est un polynôme.

Exercice 42. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes qui converge simplement sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Exercice 43. Soit f continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et :

$$f_n(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (f_n(y) - n\|x - y\|).$$

Etudier les modes de convergence de cette suite de fonctions.

Exercice 44. Soit $M \in \mathbb{R}^+$, (f_n) une suite de fonctions réelles $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et telles que $\|f_n\|_\infty + \|f'_n\|_\infty \leq M$. Montrer que (f_n) admet une extraction qui converge uniformément sur $[0, 1]$.

3 Suites et développements asymptotiques.

Exercice 45. Montrer que la suite $u_n = \sin(n)$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 46. Montrer que $\{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Généraliser.

Exercice 47. Soit une suite u_n telle que $u_n \rightarrow +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. Montrer que $\exp(iu_n)$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Exercice 48. Déterminer toutes les fonctions continues périodiques de périodes 1 et $\sqrt{2}$.

Exercice 49. Soit (u_n) une suite réelle bornée. On suppose que $u_n^2 + u_n - u_{n+1} \rightarrow 0$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 50. Soit $u_0 \in \mathbb{N}^*$, et u_n définie par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = [a^{2^n}]$ pour tout n .

Exercice 51. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que cette suite a une unique valeur d'adhérence si et seulement si elle converge.

Exercice 52. Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \rightarrow [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha), \quad a > 0, \quad \alpha > 1$$

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent de u_n .
3. Traiter l'exemple de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$.

Exercice 53. DA de la racine positive de $nX^{n+1} - (n+1)X^n - \frac{1}{2}$.

Exercice 54. On note $f_n(x) = x \cos^n(x)$. Soit $x_n \in [0, \pi/2]$ qui maximise f_n . Existence et DA de x_n , et de $f_n(x_n)$.

Exercice 55. Soit $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique x_n vérifiant $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$. DA de x_n .

Exercice 56. Soit u_n une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{u_{2n}}{2}$ converge. Montrer que u_n converge.

Exercice 57. Soit une fonction f de $[0, 1]$ dans lui-même, continue. On note u_n une suite récurrente associée à f . Montrer que u_n converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

Exercice 58. Etudier la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{\exp u_n}{n+1}$.

Exercice 59. Soit u_n une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Exercice 60. 1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution x_n dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?

3. Donner un DL de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n \rightarrow \infty$.

4. Obtenir ensuite un DL de x_n à l'ordre le plus grand possible.

Exercice 61. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive x_n . Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n en fonction de n .

Exercice 62. Soit u_n une suite réelle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que u soit monotone à partir d'un certain rang.

Exercice 63. Etudier la convergence, et calculer

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Exercice 64. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - u_n^2. \end{cases}$$

Etudier la convergence de cette suite, ainsi que sa limite éventuelle. Soit $\mathcal{A}_k = \{u_0 | \forall n \geq k, u_n = u_k\}$. Expliciter le lien entre $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{A}_{k-1}$. Montrer que $\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$ est dénombrable.

4 Séries numériques.

Exercice 65. Soit u_n une suite réelle décroissante qui converge vers 0.

1. *Critère de condensation de Cauchy.*

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum p^n u_{p^n} \text{ converge.}$$

2. Exemples.

(a) $\sum \frac{1}{p_n}$ où p_n est le n -ième entier dont l'écriture ne comporte pas de 9.

(b) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum \min(u_n, \frac{1}{n})$ diverge.

(c) Divergence de $\sum \frac{1}{n}$.

(d) Convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 66. 1. Montrer que $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge, avec p_n le n -ième entier premier.

2. En admettant le théorème des nombres premiers, ie $\Pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$, où $\Pi(n)$ est le nombre de nombres premiers plus petits que n , prouver ce résultat.

Exercice 67. Nature de la série de terme général $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Exercice 68. Soit $\delta > 0$ fixé et z_n une suite de nombres complexes tels que $\|z_i - z_j\| \geq \delta, \forall i \neq j$. Trouver un α tel que la série de terme général $\frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

Exercice 69. Nature de la série de terme général $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Exercice 70. Convergence et somme de $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$.

Exercice 71. Donner la nature de la série de terme général :

- $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$,
- $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha}$,
- $u_n = (\operatorname{ch}(n))^\alpha - (\operatorname{sh}(n))^\alpha$,
- $\frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$,
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$,
- $(n+1)^{1/n} - n^{1/n}$.
- $\frac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)}$.

Exercice 72. Nature de la série de terme général u_n défini par $u_{n+1} = \frac{1}{n \exp u_n}$.

Exercice 73. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 74. *Théorème de Riemann.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u_n le terme général d'une série semi-convergente. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)} = \alpha$.

Exercice 75. Etudier la nature de la série de terme général $\sin(n! \pi e)$.

Exercice 76. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sigma(n)}{n^2}$

Exercice 77. Soit p_n le plus grand facteur premier dans la décomposition de n . Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{np_n^2}$.

Exercice 78. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 |x - r_n|^{1/2}}$, où r_n est une suite de réels. Montrer que S existe sauf sur un ensemble de mesure nulle, c'est à dire une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_\varepsilon$ de diamètre plus petit qu' ε tel que $A \subset \Omega_\varepsilon$.

Exercice 79. Soit une suite a_n telle que $a_n \sum_{k=0}^n a_k^2 \rightarrow 1$. Donner un équivalent de a_n .

Exercice 80. Soit (a_n) une suite réelle positive et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ avec $u_0 > 0$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 81. Soit (u_n) une suite de complexes qui converge au sens de Cesàro vers zéro. Étudiez la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{n+k+1}$.

Exercice 82. Soit α désigne un réel strictement positif. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x} dx$

Exercice 83. Etudier la série de terme général $\frac{1}{n^{1+i\alpha}}$.

Exercice 84. Etudier la série de terme général $\frac{\cos \ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 85. Soit $P(n) = \max\{p \text{ premier}, p \mid n\}$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{nP(n)}$ converge.

Exercice 86. Critère de Raabe-Duhamel.

Soit $u_n > 0$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe une constante C telle que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

5 Calcul différentiel, extremums.

Exercice 87. Méthodes du gradient.

Soit $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

– Une condition d' α -ellipticité, ie :

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla J(x) - \nabla J(y), x - y \rangle \geq \alpha \cdot \|x - y\|^2.$$

– ∇J est M -Lipschitzien :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \leq M \cdot \|x - y\|.$$

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$J(x) - J(y) \geq \langle \nabla J(y), x - y \rangle + \frac{\alpha}{2} \cdot \|x - y\|^2.$$

2. (a) Prouver que J est strictement convexe.

(b) i. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1]$,

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) - \frac{\alpha}{2} \cdot t(1-t)\|x - y\|^2.$$

ii. Interpréter graphiquement la condition d'ellipticité.

(c) Montrer que J est coercive, ie : $|J(x)| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$.

3. Montrer que J admet un minimum atteint en un point unique, que l'on notera x^* .

4. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla J(x_k).$$

Pour la suite, on va supposer que $\rho_k = \rho$, ou ρ est une constante (méthode à pas fixe). On pourrait raffiner la méthode en considérant une suite bien choisie (méthode à pas optimal, ...).

(a) Interpréter graphiquement la méthode pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Identifier deux cas limites.

(b) Montrer que sous une condition supplémentaire sur ρ , la suite x_k converge vers x^* . Trouver la vitesse de convergence et expliquer l'intérêt de la méthode.

Exercice 88. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $c > 0$ tels que, pour tous x, y , $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$.

1. Montrer que pour tous x, h , $\|df_x(h)\| \geq c\|h\|$.

2. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 89. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Prouver que ∇f est surjective sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 90. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que la forme différentielle $\omega = f(y)(xe^y dx + y dy)$ soit exacte. En trouver alors les primitives.

Exercice 91. Quelles sont les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que la forme différentielle $\omega = f(x, y)d(x^2 + y^2)$ soit exacte? En trouver alors les primitives.

Exercice 92. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 1$ et $|g'(x)| < 1$. On définit φ sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (f(x) + g(y), f(y) + g(x))$.

1. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.
2. Si $|g'(x)| < k < 1$, montrer que φ est surjective.

Exercice 93. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 y \end{pmatrix}.$$

Trouver les extremas de f sur $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

Exercice 94. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x, y), 2xy) \end{pmatrix}.$$

Déterminer f de sorte que $d\phi_{(x,y)}$ soit une similitude pour tout (x, y) .

Exercice 95. *Théorème de la submersion.*

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que df_a est surjective. Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme ϕ d'un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f \circ \phi^{-1}$ soit l'application $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 96. Soient $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, et l'équation $(E) : \cos(tx) + \sin(tx) = x$. Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que lorsque $t \in U$, l'équation (E) admet une unique racine $x(t)$, et que l'application $t \mapsto x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 97. *Equation d'Euler.*

On s'intéresse au problème suivant en calcul des variations :

$$(P) \quad \min_{x \in X} J(x) = \int_0^1 L(t, x(t), x'(t)) dt.$$

où $X = \{x \in \mathcal{C}^2 \mid x(0) = a, x(1) = b\}$, L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On suppose que (P) admet une solution u . Montrer que u satisfait l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, u(t), u'(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, u(t), u'(t)).$$

On étudiera, pour Φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$, l'application $m \mapsto J(u + m\Phi)$.

Exercice 98. On considère une application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et l'ensemble $\Sigma_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$.

1. Soit (x_0, y_0, z_0) un point de Σ_a . On suppose que $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ est non nul. Montrer que, dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) , on peut écrire Σ_a sous la forme $z = g(x, y)$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. En déduire que Σ_a possède un plan tangent en (x_0, y_0, z_0) .
2. Étudier $\Sigma = \{xy^3 + yz^3 + zx^3 = 1\}$ au voisinage du point $m = (1, 1, 0)$.

Exercice 99. Continuité, existence de dérivées partielles et caractère $\mathcal{C}^1$ de $f(x, y) = \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2}$, prolongée par 0 en $(0, 0)$.

Exercice 100. On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad (1)$$

avec $f(0, 0) = 0$.

1. Continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. On fixe θ et on pose $g_\theta(r) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.
3. Le point $(0, 0)$ est-il un minimum local ?

Exercice 101. On pose $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y) - \cos(x+y)$. Montrer que f admet un minimum et un maximum globaux, les calculer. Ses extremas sont-ils locaux stricts ?

Exercice 102. Extremums de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

6 Topologie.

Exercice 103. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout compact K dans U , il existe $K \subset B(x, r) \subset U$. Montrer que U est en fait une boule ouverte.

Exercice 104. Soit $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z^2) \leq 1\}$. C est-il ouvert, fermé, borné ?

Exercice 105. Soient A et B deux parties non vides d'un evn E . Montrer que :

1. Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé.
3. Si A et B sont compacts alors $A + B$ est compact.

Exercice 106. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et K un convexe compact non vide de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(K) \subset K$. Pour tout $n \geq 1$, on considère $v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^{(i)}$.

1. Montrer que $H = \bigcap_{n \geq 1} v_n(K)$ est non vide.
2. Montrer que $H = \text{Ker}(u - Id)$.

Exercice 107. Soit E un espace normé, si A est une partie bornée non vide de E , on note C_A l'enveloppe convexe de A et $\alpha(A)$ la borne inférieure de l'ensemble des réels $\varepsilon > 0$ tels que l'on puisse recouvrir A par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε .

1. Calculer $\alpha(A)$ si E est de dimension finie.
2. Montrer que $\alpha(\bar{C}_A) = \alpha(A)$

Exercice 108. Soit E un evn de dimension n et A une partie compacte de E . On pose $L_A = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f(A) \subset A\}$.

1. Montrer que si A contient une boule ouverte, alors L_A est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

2. Caractériser les parties compactes A telles que L_A soit compact.

Exercice 109. On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infini. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F .

Exercice 110. Existe-t'il une fonction continue injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 111. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Donner deux normes non équivalentes sur E .
2. Soit D l'opérateur de dérivation. Donner un exemple de norme pour laquelle il est continu et une pour laquelle il n'est pas continu.
3. Soit M l'endomorphisme de multiplication par X . Existe-t'il une norme sur E qui rendent D et M continus?

Exercice 112. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On note $\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{B}$ les parties de E formées des fonctions à valeurs dans $[0, 1]$ qui sont respectivement injectives, surjectives, bijectives. Sont-elles ouvertes, fermées?

Exercice 113. Soit f une forme linéaire non nulle et continue sur un evn E . Montrer que si $x \notin \text{Ker}(f)$ alors $d(x, \text{Ker}(f)) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

Exercice 114. On considère $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $N_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Pour $\alpha > 0$, on définit $H_\alpha \subset E$ l'ensemble des fonctions Hölderiennes d'exposant α .

1. On définit $N_\alpha(f) = \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$. Est-ce une norme sur H_α ?
2. On définit alors $N(f) = |f(0)| + N_\alpha(f)$. Montrer que (E, N) est un espace normé.
3. Montrer que si $\alpha > 1$, alors les fonctions sont en fait constantes.
4. Montrer que (E, N) est un espace de Banach.

Exercice 115. Donner un exemple d'espace non complet sur $\mathbb{R}$.

Exercice 116. Soit A une partie convexe et dense d'un espace euclidien E . Montrer que $A = E$.

Exercice 117. *Séparabilité d'un compact.*

Montrer qu'une partie compacte A d'un espace vectoriel normé E est séparable, c'est à dire qu'il existe une suite (a_k) d'éléments de A dense dans A .

Exercice 118. Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \rightarrow A$ continue telle que

$$\forall x, y \in A, \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y).$$

1. Soit $a \in A$ et a_n définie par $a_{n+1} = f(a_n)$, avec $a_0 = a$. Montrer que a est une valeur d'adhérence de la suite.
2. Montrer qu'en fait : $\forall x, y \in A, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
3. Montrer que $f(A) = A$, et donc que f est une isométrie.

Exercice 119. Soit E un evn, K un compact convexe de E , et $f : K \rightarrow K$ 1-Lipschitzienne. Montrer qu'elle admet un point fixe.

Exercice 120. *Cube de Hilbert.*

Soit $E = \{\text{suites réelles bornées}\}$, muni de $\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$. Justifier que $\|\cdot\|$ est une norme et montrer que $\{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1\}$ est compact.

Exercice 121. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Exercice 122. Soit B une matrice antisymétrique. On suppose que la suite (B^n) converge vers une matrice C . Que peut-on dire de C ?

Exercice 123. Soit p une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose de plus que $\forall(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $p(AB) \leq p(A)p(B)$. Montrer que $p = 0$ ou p est en fait une norme.

Exercice 124. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à l'ensemble $\{P^{-1}NP, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.

Exercice 125. *Polynômes scindés.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathbb{R}^n$. On note

$$P_\sigma = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} X + (-1)^n \sigma_n.$$

Soit $\Omega = \{\sigma \in \mathbb{R}^n | P_\sigma \text{ est à racines réelles, distinctes}\}$.

1. Ω est-il ouvert ? fermé ?
2. Notons $f : \sigma \rightarrow P_\sigma$. Déterminer $f(\overline{\Omega})$.

Exercice 126. Montrer que Λ est un fermé non vide de $[0, 1]$ si et seulement si il est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même.

Exercice 127. Soit f une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Montrer que l'image par f de tout fermé est un fermé. Et pour un ouvert ?

Exercice 128. On note $E = \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E de dérivation : $D(f) = f'$.

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu.
2. Soit F le sous-ev de E constitué des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D|_F$ est continu.

Exercice 129. Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Prouver que u est surjective si et seulement si elle transforme tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ en ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 130. Soit E un evn réel et H un hyperplan de E . Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si H n'est pas fermé.

Exercice 131. Soit K un convexe compact de E , symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non vide. On munit E d'une norme quelconque.

1. Montrer que K est un voisinage de 0.
2. On définit la jauge de K par $J_K(x) = \inf\{r > 0 | \frac{x}{r} \in K\}$. Montrer que J_K est défini sur E , que c'est une norme et préciser sa boule unité. Caractériser l'intérieur et l'adhérence de K en termes de J_K .

7 Séries de fonctions.

Exercice 132. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on pose $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ sous réserve de convergence.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 133. Soit $f_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une suite de fonctions $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$. Etudier et évaluer la fonction $\sum f_n$.

Exercice 134. On suppose que la série de terme général a_n converge. On pose pour $h \neq 0$,

$$f(h) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \left(\frac{\sin(nh)}{nh} \right)^2. \quad (2)$$

Existence, continuité, limite en 0.

Exercice 135. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe a strictement positif tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq a$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(2^n x)}{2^n}$ a une limite $g(x)$. Montrer que g est linéaire continue et que $f - g$ est bornée.

Exercice 136. Montrer que F est un fermé non vide de $\mathbb{R}$ si et seulement si il est l'ensemble des zéros d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Exercice 137. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ pour tout x positif.

1. Justifier la définition de f .
2. Montrer que f est dérivable.
3. Trouver un équivalent de f en 0^+ .
4. Montrer que $f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.
5. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 138. Soit (b_n) une suite décroissante de réels positifs. Montrer que la série de terme général $b_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 139. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0.

Exercice 140. On note $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Etudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f .
2. Donner un équivalent de f en 1^- .

Exercice 141. On note $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Etudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f .
2. Donner un équivalent de f en 0 et en 1.

Exercice 142. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}$.

1. Etudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$, on le notera g , et donner alors un équivalent de $f - g$.

Exercice 143. On désigne par S la somme de la série de fonctions $u_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^2(a^2+n^2)}$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $S''(x) - a^2 S(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x}{4}$. Déterminer S .

Exercice 144. Soit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 n^2}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Limite de $af(a)$ quand $a \rightarrow 0$?
3. Limite de $f(a)$ quand $a \rightarrow +\infty$?

Exercice 145. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$ on pose $u_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction continue, f .
2. Justifier la dérivabilité de f sur $] - 1, 1[$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 146. On pose $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x - n| \text{ tq } n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$ est définie et continue.
2. Montrer que ϕ est lipschitzienne. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Exercice 147. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
2. Chercher un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 148. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)}, \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}^2(nx)}.$$

8 Espaces préhilbertiens.

Exercice 149. Soit H un Hilbert réel. On note $\mathcal{L}_c(H)$ l'espace des endomorphismes continus de H muni de la norme d'opérateur et B sa boule unité ouverte.

1. Soit $t \in B$. Montrer que l'application $\phi : u \rightarrow \frac{1}{2}(u^2 + t)$ de $\mathcal{L}_c(H)$ dans lui-même possède un unique point fixe dans B .
2. Soit $f \in \mathcal{L}_c(H)$ vérifiant $(f(x)|x) \geq a\|x\|^2$ pour un certain $a > 0$. Montrer l'existence de $g \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $g^2 = f$ et $(g(x)|x) \geq b\|x\|^2$ pour un certain $b > 0$.

Exercice 150. Soit H un espace de Hilbert.

1. Soit G un sous espace de H dense dans H et $f : G \rightarrow H$ linéaire et continue. On note j l'injection canonique de G dans H et on suppose $\|j - f\| < 1$. Montrer qu'il existe un unique prolongement linéaire continu de f à H . On le note g . Montrer que g est bijectif et d'inverse continue.
2. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale de H qui engendre un sous-espace dense. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une seconde suite de H telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_n - \varepsilon_n\|^2 < 1$. Montrer que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre et qu'elle engendre un sous espace dense dans H .
3. Le résultat reste-t-il vrai si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|e_n - \varepsilon_n\|^2 \leq 1$?

Exercice 151. Espace ℓ^2 .

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u, v \in E$, on pose : $(u | v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(u | v)$ existe.
3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
4. Montrer que E , muni de la norme associée, est complet.

Exercice 152. *Théorème de Hahn-Banach dans un cas simple.*

Soit E un espace préhilbertien réel et B une boule ouverte de E ne contenant pas $\vec{0}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall \vec{x} \in B, f(\vec{x}) > 0$.

Exercice 153. *Applications bilinéaires antisymétriques.*

Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3 et $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire antisymétrique.

Montrer qu'il existe $f \in E^*$ unique telle que : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \phi(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x} \wedge \vec{y})$.

Exercice 154. *Déterminants de Gram.*

Soit E un espace préhilbertien et $u_1, \dots, u_n \in E$. On note $G = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de Gram de ces vecteurs : $g_{ij} = \langle u_i | u_j \rangle$.

1. On suppose E de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$. Exprimer G en fonction de $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.
2. En déduire que $\det(G)$ est un réel positif ou nul, et nul si et seulement si les vecteurs u_i sont liés.
3. Montrer le même résultat sans supposer que E est de dimension finie.
4. Examiner le cas particulier $n = 2$.
5. Application : Le tétraédre $ABCD$ est tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.
6. Congruences des matrices de Gram. Soit E un ev hermitien et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases quelconques. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?
7. Forme quadratique associée à la matrice de Gram. Soit E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i,j} a_{ij} \langle e_i | x \rangle \langle e_j | x \rangle = |x|^2.$$

Exercice 155. *Produit scalaire.*

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose pour $f, g \in E$:

$$(f | g) = \int_{t=a}^b u(t) f(t) g(t) dt.$$

1. A quelle condition sur u définit-on ainsi un produit scalaire ?
2. Soient u, v deux fonctions convenables. A quelle condition les normes associées sont-elles équivalentes ?

Exercice 156. *Applications conservant le produit vectoriel.*

Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3. Trouver les applications $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

1. $f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$.
2. $f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$.

Exercice 157. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et (a_n) une suite d'éléments de $[a, b]$.

Pour $f, g \in E$, on pose : $\langle f | g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$.

1. A quelle condition sur la suite (a_n) définit-on un produit scalaire ?
2. Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux telles suites telles que les ensembles $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.

3. Question ouverte : à quelle condition les normes associées à deux suites (a_n) et (b_n) sont-elles équivalentes ?
4. Montrer qu'il n'existe pas de suite (a_n) pour laquelle E soit complet.

Exercice 158. Soit $u_1, \dots, u_p$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $(u_i | u_j) < 0$ pour $i \neq j$.

1. Montrer que $p - 1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre.
2. Montrer que l'on ne peut trouver plus de $n + 1$ vecteurs réunissant ces conditions.
3. Montrer que l'on peut en trouver $n + 1$.

9 Espaces euclidiens et hermitiens. Formes bilinéaires et quadratiques.

Exercice 159. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| \leq 1$. Montrer que $E = \text{Ker}(u - Id) \perp \text{Im}(u - Id)$ et que la suite $v_p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p u^{(k)}$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(u - Id)$.

Exercice 160. Soit E un espace euclidien de dimension n et s une symétrie de E .

1. Que dire de $s^* \circ s$?
2. Montrer que $P(X) = \det(XId + s^* \circ s)$ est un polynôme réciproque.
3. Montrer que $P(1) \geq 2^n$, à quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 161. Quels sont les endomorphismes de E à la fois auto-adjoints et orthogonaux ?

Exercice 162. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

1. Montrer que les valeurs propres de M sont imaginaires pures.
2. Montrer que $\text{Ker} f \perp \text{Im} f$. En déduire que $g = f|_{\text{Im} f}$ est un isomorphisme de $\text{Im} f$.
3. Montrer que g^2 est diagonalisable. En déduire que $\text{rg}(M)$ est pair.

Exercice 163. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Exercice 164. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t B B$.

Exercice 165. 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. Trouver le minimum de :

$$\mathcal{J}(X) = {}^t X A X - 2Y^t X.$$

2. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que Soit $A - B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $B^{-1} - A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 166. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $q_A \leq q_B$. Montrer que :

$$\det(A) \leq \det(B).$$

Exercice 167. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On définit, pour $X \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(X) = \det \begin{pmatrix} 0 & {}^t X \\ X & A \end{pmatrix}.$$

Que dire de Q ?

Exercice 168. Que dire (sans le calculer explicitement) du déterminant de la matrice de coefficient général : $a_{ij} = \frac{1}{a_i + a_j + 1}$, avec a_i réel positif ?

Exercice 169. Déterminer l'ensemble des formes bilinéaires réflexives, i.e. les formes bilinéaires qui vérifient :

$$\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) = \phi(y, x).$$

Exercice 170. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q_a(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz)$. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique est elle non dégénérée, et trouver une base orthogonale pour toutes les q_a .

Exercice 171. A symétrique et $A^k = I$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 172. $\sum_{i,j} a_{ij}^2$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$.

Exercice 173. u autoadjoint et $\text{tr}(u) = 0$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint tel que $\text{tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul tel que $u(\vec{x}) \perp \vec{x}$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_i)$ telle que : $\forall i, (u(\vec{e}_i) | \vec{e}_i) = 0$.

Exercice 174. Soit (A_i) une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.

Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que : $\forall i, A_i = P_i(A)$.

Exercice 175. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, B définie positive. Montrer que les valeurs propres de AB sont réelles.

Exercice 176. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives. Montrer que $0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

Exercice 177. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

Exercice 178. f quelconque, il existe une BON dont l'image est orthogonale

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ dont l'image par f est une famille orthogonale.

Exercice 179. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que : $\forall \vec{x} \in E, \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leq (f(\vec{x}) | \vec{x}) \leq \lambda_n \|\vec{x}\|^2$.
2. Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f .
3. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(\vec{e}_i) | \vec{e}_i) = \lambda_i$.
Montrer que : $\forall i, f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

Exercice 180. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, λ, λ' leurs plus petites valeurs propres et μ, μ' leurs plus grandes valeurs propres. Montrer que toute valeur propre de $A + B$ est comprise entre $\lambda + \lambda'$ et $\mu + \mu'$.

Exercice 181. Soient $h \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, $\vec{x}_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale sur $\text{vect}(\vec{x}_0)$, et $f = h + p$.

On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de h et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ celles de f .

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

Exercice 182. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer : $\text{Ker } f = \text{Im } f \Rightarrow f + f^* \in GL(E)$.
2. Montrer la réciproque lorsque l'on a $f^2 = 0$.

Exercice 183. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|f\|^2 = \max\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \text{Sp}(f^* \circ f)\}$.

Exercice 184. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. En considérant l'endomorphisme $f^* \circ f$, montrer que si f est inversible alors f se décompose de manière unique sous la forme $f = u \circ h$ avec u unitaire et h hermitien positif.
2. Si f est non inversible, montrer qu'une telle décomposition existe mais n'est pas unique (on rappelle que $U(E)$ est compact).
3. Montrer que l'application $f \rightarrow (u, h)$ est continue sur $GL(E)$.

Exercice 185. Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1. Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u . En déduire que u est diagonalisable en base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
 - (1) u est normal.
 - (2) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
 - (3) Tout sev stable par u est stable par u^* .
 - (4) Si un sev F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .
 - (5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

Exercice 186. Donner la signature et le rang de :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{ij} a_{i,j}(x_i - x_j)^2.$$

10 Coniques, quadriques, intégrales doubles, analyse vectorielle.

Exercice 187. Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$.

Exercice 188. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On définit $Q(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ par $Q(X, Y) = \frac{P(X) - P(Y)}{X - Y}$.

1. Condition pour que $\{Q(x, y) = 0\}$ soit une ellipse ?
2. En donner son excentricité.

Exercice 189. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \sin(2x)} dx$.

Exercice 190. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la forme quadratique $Q_\alpha : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha(\sum_{i=1}^n x_i)^2$ est elle définie positive ? Décrire $\{Q_\alpha(x) = 0\}$.

Exercice 191. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculer $\mathcal{I}_n = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$

Exercice 192. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. On définit

$$E : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{2}, t \geq |x| \\ 0, t < |x| \end{cases} \end{array} \right).$$

Calculer $\int_{\mathbb{R}^2} E(x, t) \square \phi dx dt$.

Exercice 193. Nature et éléments de :

$$mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 194. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3z^2}{4} + xz = 1$.

1. Nature de $\mathcal{S}$.
2. Volume intérieur.

Exercice 195. Déterminer les λ tels que $x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) = \lambda$ soit un cône et en préciser le sommet et la nature.

Exercice 196. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

Exercice 197. Soit Q la forme quadratique définie par $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + yz$. Trouver $\max(Q)$ sur $\mathcal{S}^2$ et dire ce que sont les surfaces de niveau de Q .

Exercice 198. Etudier $Q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. En donner la signature et le rang.

11 Intégrabilité, intégrales à paramètres.

Exercice 199. Que dire de l'existence des intégrales suivantes ?

- $A = \int_0^\infty x^a \left(\int_0^x \left(\frac{t}{1+t^4} \right)^{1/4} dt \right)^2 dx$.
- $B = \int_0^\infty x^a \left(\int_0^x |\sin(u)| du \right)^2 dx$.
- $I_n = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin(x)) x^n dx$. Préciser en plus un équivalent en $+\infty$.

Exercice 200. Formule des compléments.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose :

$$f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} \exp(-tx)}{1+t} dt.$$

1. Montrer que f_α est $\mathcal{C}^1$, et donner une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants vérifiée par f_α .
2. Montrer que $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. Pour cela on pourra se référer à l'exercice 99, ou montrer par une formule des résidus que :

$$\forall 0 < m < n, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)}.$$

4. Retrouver alors l'intégrale de Gauss.

Exercice 201. Existence, calcul ou équivalent de

$$\int_0^1 f\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)dx,$$

de

$$\int_0^1 x^n f(x^n)dx.$$

Exercice 202. Etudier $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+\ln(x)}dx$.

Exercice 203. *Intégrale de Dirichlet.*

1. Montrer que, si $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx)}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}dt.$$

2. En déduire alors : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 204. Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et bornée. On définit alors $I_n = \int_0^\infty \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx$.

1. Existence ?

2. Limite en $+\infty$.

Exercice 205. Existence et calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt$.

Exercice 206. On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-tx)}{1+t^2}dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et donner un équivalent aux bornes de f .

Exercice 207. Etudier et calculer $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)}{1+t}dt$.

Exercice 208. Effectuer un développement asymptotique de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ à l'ordre le plus grand possible.

Exercice 209.

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ converge ou telle que f a une limite finie en $+\infty$. Pour $a, b > 0$, montrer que $\int_0^\infty \frac{f(at) - f(bt)}{t}dt$ converge et donner sa valeur.

2. Applications à $\int_0^\infty \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t}dt$, $\int_0^\infty \frac{\sin(t)^3}{t^3}dt$.

Exercice 210. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrer que $\int_{t=0}^1 \frac{dt}{e^{-i\theta}t} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\exp(in\theta)}{n}$.

Exercice 211. 1. Calculer $f(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(at) dt$.

2. Soit $g(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin(at)}{t} dt$; calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a)$.

Exercice 212. Soient $J(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}$ et $K(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} (J(x) - K(x))$ et montrer que $J(x) = -\ln x + 2 \ln 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1)$.

Exercice 213. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t) dt$ converge (pas forcément absolument).

On pose $\varphi(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que φ est continue en 0.

Exercice 214. On pose pour $n \geq 2$: $v_n = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x^n} dx$. Montrer que la suite (v_n) converge. Nature de la série $\sum (v_n - 1)$?

Exercice 215. On pose pour $n \geq 2$ $u_n = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$. Montrer que la suite (u_n) converge, puis que la série $\sum (u_n - 1)$ converge également.

Exercice 216. Domaine de définition de $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$. Calculer $I(2)$ et $I(3)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

Exercice 217. On considère $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Domaine de définition, monotonie, convexité de f (sans dériver f).
2. Continuité, dérivabilité, calcul de $f^{(k)}(x)$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en 1.
4. Calculer $f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Exercice 218. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver la limite de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\alpha)}{n+k}$.

Exercice 219. Existence et continuité de $f(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|} \cos(x+t)}{\sqrt{|t|(1+|t|)}} dt$. Montrer que f est intégrable.

Exercice 220. 1. Développer, pour tout $x > 0$, $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1} dt$ en série de fractions rationnelles.

2. Montrer qu'en 0^+ , $s(x)$ est équivalente à $\frac{\pi}{2x}$.

Exercice 221. Étudier $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

Exercice 222. Soit $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$.

1. Trouver le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calculer $f - f'$.
4. Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.
5. Montrer que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.
6. Tracer la courbe de f .

Exercice 223. Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\alpha x} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $I = \int_{x=0}^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 224. Étudier la limite en 0^+ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t} e^{-xt} dt$.

Exercice 225. Montrer, pour $x > 1$: $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} dt$.

Exercice 226. Soit $f : x \mapsto \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t+1}$. Déterminer son domaine de définition ; étudier sa continuité et sa monotonie. Calculer $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t}$ et en déduire des équivalents et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 227. Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Chercher un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de $I_n = \int_{x=0}^{\alpha} \sin(x) \exp(\lambda n \sin^2(x)) dx$.

Exercice 228. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!} \int_{t=0}^1 t(t-1) \dots (t-n) dt$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
2. Donner un équivalent de a_n .

Exercice 229. Soit $u_n(t)$ le terme général d'une série : $u_n(t) = t^{n-1} \sin(nx)$ avec $0 \leq x \leq \pi$.

1. Étudier la convergence de la série.
2. Calculer $\sum_{p=0}^n u_p(t) = S_n(t)$. Mettre $S_n(t)$ sous la forme $\frac{P_n(t)}{Q(t)}$ avec $Q(t) > \alpha$, $\alpha > 0$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=0}^1 S_n(t) dt$.
4. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Exercice 230. Soit f continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{t=a}^b f(t) \cos(nt) dt \rightarrow 0$.
2. On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit $u_n = \int_{t=0}^{n\pi} \sin^2(nt) f(t) dt$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \rightarrow \infty$ et la préciser.

Exercice 231. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction φ .
2. La convergence est-elle uniforme ? La convergence est-elle monotone ?
3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_{x=0}^1 f_n(x) dx$. Montrer que $J_n \sim \frac{2}{n^2}$.

Exercice 232. Soit $f(x) = \int_{t=0}^1 \frac{1-t}{\ln t} t^x dt$. étudier le domaine de définition de f , sa dérivabilité, puis calculer $f(x)$.

Exercice 233. Soit $I(a) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\sinh x}{x} e^{-ax} dx$.

1. Quel est le domaine de définition de I ?
2. étudier la continuité et la dérivabilité de I .
3. Calculer $I(a)$.

Exercice 234. 1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $F(x) = \int_{t=a}^b f(t) e^{-itx} dt$ avec $a < 0 < b$. Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

2. Montrer que $F(x) = \frac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + \left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2} dt$.

	$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^{t+t^2}e^{-t}} \text{ cv}$	$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \text{ dv}$
	$\int_{t=0}^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t} dt \text{ cv ssi } \alpha > -1$	$\int_{t=e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln \ln t)} \text{ dv}$
	$\int_{t=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right) dt \text{ dv}$	$\int_{t=0}^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt \text{ cv}$
Exercice 235.	$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \text{ cv ssi } \alpha > 1$	$\int_{t=0}^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}} \text{ dv}$
	$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt \text{ cv ssi } 0 < \beta - \alpha < 1 \text{ ou } \alpha = 0$	$\int_{t=0}^{+\infty} \sin(t^2) dt \text{ cv}$
	$\int_{t=0}^1 \frac{dt}{\arccos t} \text{ cv}$	$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha} dt \text{ dv}$
	$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t) dt}{(t^2-1)^\alpha} \text{ cv ssi } 0 < \alpha < 1$	$\int_{t=0}^1 \frac{ \ln t ^\beta}{(1-t)^\alpha} dt \text{ cv ssi } \alpha < \beta + 1$
	$\int_{t=0}^{+\infty} t^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{t}}) dt \text{ cv ssi } -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$	$\int_{t=0}^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t} t^{-k} dt \text{ cv}$

12 Séries entières.

Exercice 236. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ ou en R^- .
5. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont strictement positifs, alors pour tout entier p , $\frac{f(x)}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$.

Exercice 237. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence, R , de cette série.
2. Étudier la convergence de f pour $x = \pm R$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x)$.

Exercice 238. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est 1 et que la série diverge pour $x = 1$.

1. Montrer que $A(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.
2. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim a_n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \sim A(x)$ pour $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 239. Donner le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha \right) x^k,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 240. Soit (a_n) une suite de $\mathbb{C}$ telle que $f(x) = \sum a_n x^n$ existe pour tout x dans $] -1, 1[$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = l \in \mathbb{C}$. Démontrer que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme l dans les différents cas suivants :

1. $a_n \geq 0$,
2. $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$,
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n|^2$ converge,

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k = 0$.

Exercice 241. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

- (a_n) est périodique non nulle,
- $a_n = \sum_{d|n} d^2$,
- $a_n = \frac{n^n}{n!}$,
- $a_{2n} = a^n, a_{2n+1} = b^n, 0 < a < b$,
- $a_{n^2} = n!, a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$,
- $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$,
- $a_n = e^{\sqrt{n}}$,
- $a_n = \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{n!}$,
- $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt[n]{n}}$,
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$,
- $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, a_0 = a_1 = 1$,
- $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$,
- $a_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Exercice 242. Donner le rayon de convergence et calculer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-2) \cdots (2)}{(2n+1) \cdots (3)} x^n.$$

Exercice 243. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{n^{1/3}}, \quad b_n = \sin(a_n).$$

Déterminer les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ et la nature de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ en fonction de x .

Exercice 244. Soit (a_n) le nombre de façons de marquer n points au rugby. Donner un équivalent de a_n .

Exercice 245. Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} e^{inx}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Donner une CNS sur α pour que f soit développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 246. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est 1 et que la série diverge pour $x = 1$. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim a_n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \sim A(x)$ pour $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 247. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$. Déterminer le rayon de convergence et montrer que f vérifie l'équation $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$. Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$.

Exercice 248. Calculer $\int_{t=0}^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$.

Exercice 249. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$. Montrer, pour $0 \leq r \leq R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Exercice 250. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$ telle que pour tout $z \in D^\circ(0, R)$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 251. *Formules de Cauchy.*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. On note $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0, R son rayon et d la distance de 0 à ∂U ($d = +\infty$ si $U = \mathbb{C}$).

1. Montrer, pour $0 < r < \min(R, d)$ et $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} d\theta$.
2. Montrer que l'application $r \mapsto \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta$ est analytique sur $[0, d[$.
3. Pour $0 < r < d$ et $|z| < r$ on pose $g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} re^{i\theta} d\theta$. Montrer que g est la somme d'une série entière de rayon supérieur ou égal à r et que g coïncide avec f sur $D^\circ(0, r)$.
4. Applications :
 - Soit f un fonction analytique sur un disque ouvert contenant 0, (continue sur le disque fermé), et nulle au bord. Montrer que f nulle. On a tout de même mieux, le principe du maximum, qui dit qu'une fonction holomorphe ne peut admettre de maximum sur un ouvert (et donc qu'il est nécessairement atteint sur la frontière).
 - Théorème de Liouville : Si $U = \mathbb{C}$ et f est bornée alors f est constante.
 - Théorème de d'Alembert Gauss : Si $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annule pas alors P est constant.
 - Théorème de Weierstrass : Si (f_n) est une suite de fonctions analytiques convergeant uniformément sur U vers une fonction f alors f est analytique sur U .
 - La composée de deux fonctions analytiques est analytique.

Exercice 252. *Théorème de Bieberbach.*

1. Développer en série entière $f : z \mapsto z(1 - z)^{-2}$. Montrer que f est injective sur $D^\circ(0, 1)$.
2. Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins 1 à coefficients réels. On suppose f injective sur $D^\circ(0, 1)$ et on veut prouver : $\forall n \geq 1, |a_n| \leq n$.
 - (a) Montrer pour $|z| < 1$ que $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$ et en déduire :

$$\operatorname{Im}(z) \geq 0 \implies \operatorname{Im}(f(z)) \geq 0.$$

- (b) Pour $0 < r < 1$ calculer $\int_{t=0}^{\pi} \operatorname{Im}(f(re^{it})) \sin nt dt$. En déduire $|a_n| r^n \leq n |a_1| r$ et conclure.

Exercice 253. Donner le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

13 Séries de Fourier.

Exercice 254. On prolonge la fonction racine carrée par imparité sur $[-\pi, 0[$ et par 2π -périodicité sur $\mathbb{R}$. Convergence uniforme de la série de Fourier de la fonction ainsi obtenue ? Vers quelle fonction ?

Exercice 255. Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur $[0, a]$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^a f(t) \cos(xt) dt = 0.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 256. *Sommes de Gauss.*

Le but de cet exercice est de calculer certaines sommes de Gauss, utiles en algèbre et arithmétique, notamment pour la loi de réciprocité quadratique et les caractères de Legendre de module premier.

Pour n et m deux entiers relatifs, avec $n \geq 2$, on définit la somme de Gauss $G_{m,n}$ par :

$$G_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2i\pi k^2 m}{n}\right).$$

Par souci de lisibilité, on écrira G_n pour $G_{1,n}$. Nous allons nous intéresser à G_n .

1. Réaliser la décomposition en série de Fourier de la fonction f 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2i\pi(k+t)^2}{n}\right).$$

2. Montrer que f est somme de sa série de Fourier et préciser le mode de convergence.
3. En déduire G_n , on n'hésitera pas à poser $F = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi u^2) du$, dont on donnera l'expression simultanément. C'est l'intégrale de Fresnel.

Exercice 257. On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer sa série de Fourier.

Exercice 258. *Théorème de Féjer.*

Soit f une fonction continue et 2π -périodique. On note $S_k(f)$ la $k^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f . On veut montrer que la suite S_k converge uniformément vers f en moyenne de Césaro, i.e. :

$$\left\| \frac{\sum_{k=0}^n S_k(f)}{n+1} - f \right\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

1. Exprimer $\frac{\sum_{k=0}^n S_k(f)}{n+1}$ sous forme d'une convolution. On introduira F_n , le noyau de Féjer.
2. Vérifier que F_n est positif, de moyenne 1.
3. En déduire le théorème, on pourra introduire le module de continuité uniforme de f , que l'on notera ω .

Exercice 259. *Théorèmes de Dini-Lipschitz.*

Soit f une fonction à valeurs complexes 2π périodique.

1. On veut montrer que si le module de continuité uniforme ω de f est tel que $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt$ existe, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer d'abord le *lemme de Riemann-Lebesgue uniforme* : Soit $K : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ continue. Alors

$$M(x, \lambda) = \int_c^d K(x, t) \exp(i\lambda t) dt$$

tend vers 0 uniformément sur $[a, b]$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

- (b) Exprimer la somme partielle de Fourier sous forme d'une convolution, on fera apparaître le noyau de Dirichlet, D_n .
 - (c) Déduire le résultat.
2. Montrer que le résultat s'applique dans le cas des fonctions hölderiennes, ce qui donne le théorème de Dini-Lipschitz.

Exercice 260. *Théorème de Bernstein.*

Théorème. *Si f est Hölderienne d'exposant $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .*

1. Montrer la formule suivante :

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx = 8\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin(nh)^2 |c_n(f)|^2.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_N^{2N} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \leq \frac{c}{N^{2\alpha}}.$$

3. Montrer que la série de terme général $t_p = \sum_{2^p \leq |n| \leq 2^{p+1}} |c_n|$ est convergente.
4. En déduire que la série de Fourier de f converge normalement vers f .

On peut démontrer que cet exposant est optimal, c'est à dire qu'il existe une fonction $\frac{1}{2}$ -hölderienne de série de Fourier non normalement convergente (voir la suite de Rudin-Shapiro).

Exercice 261. Trouver des coefficients a_n tels que $\forall x \in [0, \pi]$,

$$\cos(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(nx).$$

- Exercice 262.**
1. Calculer les coefficients de la fonction 2π -périodique f affine sur $[0, 2\pi[$ et vérifie $f(0) = 0$ et $f(2\pi^-) = 2\pi$.
 2. Soit s_n la somme partielle d'indice n de sa série trigonométrique. Déterminer les extréma de s_n . Soit m_n le premier minimum de s_n sur $[0, 2\pi[$. Étudier le comportement de m_n et interpréter.

Exercice 263. Soit f une fonction de la classe de Schwartz sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp(2i\pi nx)$$

où l'on a défini $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2i\pi xt) dt$. En déduire $\zeta(2)$ en utilisant la fonction $\exp(-a|x|)$ pour $a > 0$.

14 Polynômes.

Exercice 264. *Résultant.*

Soient F, G deux polynômes de degrés respectifs n et m . On définit une application ϕ de la manière suivante :

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n-1}[X] \times \mathbb{C}_{m-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_{n+m-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto & UF + VG \end{array} \right).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F, G pour que ϕ soit injective. En déduire une méthode pour savoir si deux polynômes ont ou non des racines en commun.
2. Ecrire alors le déterminant de la matrice de ϕ dans la base canonique. On le note $Res(F, G)$, le résultant des polynômes F et G .
3. Traiter l'exemple de $F(X) = X^2 - 4X + 3$ et $G(X) = X^2 - 2X + 1$.

4. Soit $(P(t), Q(t))$, une courbe paramétrée polynômiale réelle. Proposer une méthode pour en trouver une équation cartésienne.
5. Montrer que l'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 265. Déterminer tous les polynômes réels qui envoient $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 266. Combien $P_n(X) = nX^n - X^{n-1} - \dots - X - 1$ admet-il de racines réelles ?

Exercice 267. Montrer qu'un polynôme réel est positif si et seulement si il est somme de deux carrés.

15 Réduction des endomorphismes.

Exercice 268. $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Soient A, B deux matrices réelles de taille n . Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ de la manière suivante :

1. Par un argument de densité.
2. En utilisant un calcul par blocs. On s'inspirera des produits de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X]))$:

$$\begin{pmatrix} XI_n - AB & M \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n - AB & 0 \\ N & XI_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} XI_n & 0 \\ N & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n & N \\ 0 & XI_n - BA \end{pmatrix}.$$

Exercice 269. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ existe-t'il $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre multiplicatif exactement n ?

Exercice 270. Combien y a-t'il de chemins de longueur n entre deux sommets d'un dé cubique ?

Exercice 271. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant toutes leurs valeurs propres de parties réelles strictement négatives. Montrer que pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM + MB = C$.

Exercice 272. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dire sans calculs ce que vous pouvez dire sur cette

matrice.

Exercice 273. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner les valeurs propres de Φ défini par $\Phi(M) = AM - MB$. À quelle condition existe-t'il M non nulle telle que $AM = MB$?

Exercice 274. Donner une condition nécessaire sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour que $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 275. CNS sur le corps $\mathbb{K}$ pour qu'il existe deux matrices A et B dans $SL_2(\mathbb{K})$ vérifiant $ABA^{-1}B^{-1} = -I_2$.

Exercice 276. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & a_i & \vdots \\ a_1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 277. Soit p premier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\text{Tr}(A^p) = \text{Tr}(A) \pmod{p}$.

Exercice 278. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) \leq 1$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 279. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
2. Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.
3. Dans le cas général, on note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ ($M, N, P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$).
Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

Exercice 280. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre non nulle de $A\bar{A}$, et X un vecteur propre associé. Montrer que $A\bar{X}$ est aussi vecteur propre de $A\bar{A}$.
2. Lorsque $\lambda \notin \mathbb{R}^+$, montrer que X et $A\bar{X}$ sont linéairement indépendants.
3. En déduire que $\det(I + A\bar{A}) \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 281. Soit l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM$. Calculer sa trace par un moyen simple.

Exercice 282. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Montrer que la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u est égale au nombre de facteurs invariants de u ayant λ pour racine.

Exercice 283. Soit p premier et $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{Z}$. Montrer que $\text{tr}(A^p) \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$.

Exercice 284. Donner une CNS sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 285. Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 286. Soient E un ev de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E .

On suppose que $u^3 = u^2, u \neq Id, u^2 \neq 0, u^2 \neq u$.

1. Montrer qu'une valeur propre de u ne peut être que 0 ou 1.
2. Montrer que 1 et 0 sont effectivement valeurs propres de u .
3. Montrer que u n'est pas diagonalisable.
4. Montrer que $E = \text{Im}(u^2) \oplus \text{Ker}(u^2)$.
5. Montrer que $u|_F$ avec $F = \text{Im}(u^2)$ est l'identité.

Exercice 287. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^{-1}$. A est-elle diagonalisable? Calculer e^A .
($e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$)

Exercice 288. Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(u) = 1$. Montrer que :

$$\text{Im}u \subset \text{Ker}u \Leftrightarrow u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Exercice 289. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 290. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible diagonalisable et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $B^p = A$.

1. Montrer que B est diagonalisable.
2. Si A n'est pas inversible la conclusion subsiste-t-elle ?

Exercice 291. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p ? Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Exercice 292. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 293. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\text{rg} A$ est pair.

Exercice 294. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I$ et $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer qu'alors on a $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 295. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont réelles et qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 296. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe des endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on ait : $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i$. Montrer qu'il existe un polynôme P_i tel que $u_i = P_i(u)$.
2. Réciproquement, soit $u, u_1, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i$. Montrer que u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Exercice 297. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un ev E de dimension finie, λ une valeur propre de f et p_λ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme en f .

Exercice 298. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p$ ($p \geq 2$) des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall k, u_k^2 = -\text{id}_E, \quad \forall k \neq \ell, u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1. Montrer que les u_k sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.
2. Montrer que n est pair.
3. Donner le spectre de chaque u_k .
4. Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des u_k .
5. Calculer $\det(u_k)$.

Exercice 299. Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$.

1. Quelle relation y a-t-il entre $\text{Ker} u$ et $\text{Im} u$? Montrer que $2\text{rg} u \leq \dim E$.
2. On suppose ici $\dim E = 4$ et $\text{rg} u = 2$. Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que : $u(e_1) = e_2, u(e_2) = 0, u(e_3) = e_4, u(e_4) = 0$.
3. On suppose $\dim E = n$ et $\text{Im} u = \text{Ker} u$. Est-ce que u est diagonalisable ?

Exercice 300. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I$, et $M^3 = I$.

1. Quelles sont les valeurs propres complexes de M ? (On vérifiera que ce sont effectivement des valeurs propres de M)

2. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 301. Soient u, v, h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad u \circ h - h \circ u = -2u, \quad v \circ h - h \circ v = -2v.$$

1. Cas particulier, $n = 3$, $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer si v et h existent et si oui, les donner.
2. Cas général. Que peut-on dire de $\text{tr}(u)$ et $\text{tr}(v)$? Montrer que u et v sont non inversibles. Montrer que $\text{Ker}u$ et $\text{Ker}v$ sont stables par h . Déterminer $u^k \circ h - h \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(u) \circ h - h \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. Quel est le polynôme minimal de u ?

Exercice 302. Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mu_{\mathbb{K}}(A)$ et $\mu_{\mathbb{L}}(A)$ les polynômes minimaux de A en tant que matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ ou dans $\mathbb{L}$. Montrer que ces polynômes sont égaux.

Exercice 303. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que χ_A et μ_A ont les mêmes facteurs irréductibles.

Exercice 304. Caractériser les polynômes P tels que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (P(A) = 0) \Rightarrow (\text{tr}(A) \in \mathbb{Z})$.

Exercice 305. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$ et $\text{rg}(C) = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes.

Exercice 306. Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $M_5(\mathbb{R})$?

Exercice 307. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme minimal et p le plus petit exposant de X dans l'écriture de P .

1. Si $p = 0$, que dire de u ?
2. Si $p = 1$, montrer que $E = \text{Im}u \oplus \text{Ker}u$.
3. Dans le cas général, montrer que $E = \text{Ker}u^p \oplus \text{Im}u^p$.

Exercice 308. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les scalaires λ et les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AM = \lambda M$.

Exercice 309. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application Φ_u qui à $v \in \mathcal{L}(E)$ associe $v \circ u$.

1. Montrer que $\Phi_u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer l'équivalence : $(u \text{ est diagonalisable}) \Leftrightarrow (\Phi_u \text{ est diagonalisable}) \dots$
en considérant les polynômes annulateurs de u et de Φ_u . en considérant les spectres et sous-espaces propres de u et de Φ_u .

Exercice 310. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , (F, G) deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G . Soit $E_p = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f \circ p = p \circ f\}$. Quelle est la dimension de E_p ?

Exercice 311. Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E non nul tels que $u \circ v - v \circ u = \text{Id}_E$.

1. Simplifier $u^k \circ v - v \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis $P(u) \circ v - v \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que u et v n'ont pas de polynômes minimaux.

Exercice 312. Soit E un ev réel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Montrer pour tout entier naturel n : $f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n$.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$).

Exercice 313. Soit f un endomorphisme de E (ev de dimension finie sur $\mathbb{K}$) tel que χ_f soit irréductible. Montrez que pour aucun endomorphisme g le crochet de Lie $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ n'est de rang un.

Exercice 314. Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A^3 est semblable à A^4 ? On étudiera séparément les cas :

1. A a 3 valeurs propres distinctes.
2. A a 2 valeurs propres distinctes.
3. A a une seule valeur propre.

Exercice 315. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices D, N telles que $A = D + N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$.

Exercice 316. Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices M et ${}^t M$ sont semblables.

Exercice 317. Soit $f \in \mathbb{R}^3$ telle que $\text{Spec}(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})) = 2$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 318. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que A et $2A$ sont semblables.

Exercice 319. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n .
2. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) défini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n .
3. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Exercice 320. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$, et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
2. On considère le polynôme $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.
3. En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Exercice 321. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Diagonaliser A . En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n .

Exercice 322. Soit f , endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n .

1. On suppose que pour tout sous-ev D de dimension 1 il existe $x \in D$ tel que $E = \text{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Que dire de E et f ?
2. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \text{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Montrer que si f est diagonalisable alors ses valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que si f est nilpotente alors $f^{n-1} \neq 0$.

Exercice 323. 1. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes.

Montrer qu'une matrice M commute avec D si et seulement si M est diagonale. Montrer que pour toute matrice M diagonale, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ unique tel que $M = P(D)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices M commutant avec A sont les polynômes en A .

Exercice 324. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver toutes les matrices $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $XY = YX = A$.

Exercice 325. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Exercice 326. Trouver le commutant de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 327. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $C(A)$ le commutant de A .

1. Pour $n = 2$, montrer que $C(A)$ est de dimension 2 ou 4, en donner une base.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $C(A)$ est de dimension $\geq n$ (traiter d'abord le cas où A est diagonalisable).

Exercice 328. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Exercice 329. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Comparer les valeurs propres de A et M .
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = XP'$. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$.
3. À quelle condition sur A , M est-elle diagonalisable ?

Exercice 330. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 331. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est. (Chercher les sous-espaces propres de M en fonction de ceux de A)

Exercice 332. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A, C carrées. On suppose que A et C sont diagonalisables sans valeurs propres communes. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 333. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable avec A carrée d'ordre p .

Soit λ une valeur propre de M de multiplicité m . Montrer que si $p > n - m$, alors λ est valeur propre de A .

Exercice 334. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{Spec}(B)$ et fonction de $\text{Spec}(A)$.

Exercice 335. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E .

Est-il vrai que : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \text{Ker} f + \text{Im} f = E$?

Exercice 336. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Pour $\lambda \in \text{spec}(u)$, on note $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ et $F_\lambda = \text{Im}(u - \lambda \text{Id})$. Montrer que $E_\lambda \oplus F_\lambda = E$.

Exercice 337. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\text{Ker} f \oplus \text{Im} f = E$.

Exercice 338. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\text{rg}(u - \lambda \text{Id}) = \text{rg}(u - \lambda \text{Id})^2$.

Exercice 339. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les ensembles $\mathcal{K} = \{\text{Ker}(P(u)), P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{I} = \{\text{Im}(P(u)), P \in \mathbb{K}[X]\}$ sont finis et ont même cardinal.

Exercice 340. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim(\text{Ker} f^2) = 2 \dim(\text{Ker} f) = 2d$. Montrer que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $g^k = f$ alors k divise d .

Exercice 341. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u .
2. Montrer qu'il existe un hyperplan stable par u (considérer $\text{Im}(u - \lambda \text{Id})$ où λ est une valeur propre de u).
3. Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$ -ev.

Exercice 342. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note X un vecteur propre complexe de M .

1. Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de M .
2. Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.
3. Soient $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. Montrer que (U, V) est libre dans $\mathbb{R}^n$.
4. Soit $F = \text{vect}(U, V)$. Montrer que F est stable par φ (endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à M) et donner la matrice de $\varphi|_F$ dans la base (U, V) .

Exercice 343. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit F un plan vectoriel. Montrer que si F est stable par f alors il existe $P \in \mathbb{K}_2[x]$ non nul tel que $F \subset \text{Ker} P(f)$.
2. Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_2[x]$ est irréductible, montrer que $\text{Ker} P(f)$ contient un plan stable par f .
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ montrer que f admet toujours une droite ou un plan stable.

Exercice 344. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que si F est un sev stable par u , alors $u|_F$ est diagonalisable.

Exercice 345. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H : x + 2y + 3z = 1$ un plan affine de E . Montrer que si H est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ alors 1 est valeur propre de f .

Exercice 346. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et F un sous-espace vectoriel stable par f . Montrer que $f|_F$ est aussi cyclique.

Exercice 347. Un endomorphisme f est dit semi-simple si tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f . Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

Exercice 348. Soit u un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$. Montrez que seuls $\{0\}$ et E sont stables par u si et seulement si χ_u est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Exercice 349. Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable par f . Que peut-on dire de f ? Réciproque?

Exercice 350. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

Exercice 351. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et commutant deux é deux. Montrer que $A_1 \dots A_n = 0$.

Exercice 352. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\text{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 353. Soit E un ev de dimension finie et (u_n) une suite d'endomorphismes diagonalisables convergeant vers $u \in \mathcal{L}(E)$.
 u est-il diagonalisable?

Exercice 354. On donne une matrice carrée réelle M d'ordre n . Soient α, β les multiplicités de zéro dans χ_M et μ_M . Montrer que $\dim(\text{Ker}M) = \alpha$ si et seulement si $\beta = 1$.

16 Arithmétique.

Exercice 355. Résoudre $x^2 - 4x + 3 = 0$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{143\mathbb{Z}}$.

Exercice 356. Soit G un groupe fini, et f un morphisme de groupe de G dans lui-même. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

17 Equations différentielles linéaires et non linéaires, équations aux dérivées partielles.

Exercice 357. Soit $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, toute solution de $y'' + (1 + \frac{\lambda}{t^2})y = 0$ admet un zéro dans $]a; a + \pi[$.

Exercice 358. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que $E = \{f(\cdot + \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel de dimension finie, notée n . Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire.

Exercice 359. Soit $a : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une application continue. Soit u une solution de $u'(t) = a(t)u(t)$, telle que $u(0) = I_n$. Montrer que u est unique, inversible, orthogonale de déterminant 1.

Exercice 360. Soit $u^0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha u, \quad u(0, x) = u^0(x).$$

Dessiner l'allure des solutions pour des temps donnés et expliquer le phénomène. Pour quelles valeurs du paramètre α l'EDP est elle physiquement satisfaisante? Estimer alors $\int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) dx$ (On pourra prendre une donnée initiale à support compact).

Exercice 361. Déterminer les applications f de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a,$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On utilisera le changement de variable : $u = x + y, v = x - y$.

Exercice 362. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x, y) \text{ tq } x > 0, y > 0\}$, et $b \in \mathbb{R}$. Trouver $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = b.$$

On pourra utiliser le changement de variable : $u = xy, v = \frac{y}{x}$ ou alors le passage en coordonnées polaires.

Exercice 363. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1)f$$

On posera $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$.

Exercice 364. Soit $n > 0$ et $(S) : \begin{cases} x'(t) = \frac{2}{n}x(t)y(t) \\ y'(t) = -x^2(t) + y^2(t) \end{cases}$.

1. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S) . Trouver une autre solution présentant une symétrie avec γ . Peut-on avoir comme solution $\sigma(t) = \lambda\gamma(\mu t)$? En déduire une propriété géométrique des solutions maximales de (S) .
2. Déterminer les courbes du plan formées des points (x_0, y_0) ou les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy) . En déduire quelques solutions particulières.
3. A supposer qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$, déterminer Φ et en déduire toutes les courbes intégrales.

Exercice 365. On considère le système différentiel $(S) : \begin{cases} x' = xy - y^2 \\ y' = -x^2 + y^2 \end{cases}$.

1. Que dire de l'existence de solutions de S ?
2. Montrer que le champ de vecteurs est homogène de degré 2. Faire ainsi le changement de variables projectif $(y = uv, x = v)$.
3. En déduire une intégrale première du système (S) . Effectuer un portrait de phase, et décrire les trajectoires.

Exercice 366. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ continue. On suppose qu'il existe a, b continues de J dans $\mathbb{R}^+$ telles que,

$$\forall(t, y), \quad (f(t, y) \mid y) \leq a(t)\|y\|^2 + b(t).$$

Montrer que toute solution maximale de $y' = f(t, y)$ est définie sur J entier.

18 Fonctions convexes.

Exercice 367. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z$. Montrer que le déterminant de

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0.$$

Exercice 368. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'on a :

- Soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $] - \infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.

Exercice 369. 1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.

2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 370. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}$ affine. On suppose : $\forall x > 0, f(x) \leq g(x)$ et $f(1) = g(1)$.

Montrer que $f = g$.

Exercice 371. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

Exercice 372. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que f' est continue.

Exercice 373. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f \geq 0, f' \geq 0, f'' \geq 0$.

1. Étudier l'existence des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x), f'(x), \frac{f(x)}{x}$.
2. Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x), f'(x)$, et $xf'(x)$.

Exercice 374. Soit $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(x) - x \rightarrow +\infty - > f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 375. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in [a, b], f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Montrer que f est convexe.

Exercice 376. Soit $f : [a, b] \mapsto [c, d]$ convexe, bijective, croissante. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$a \leq u_0 \leq v_0 \leq b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 377. Soit $n \geq 3$ et $A_1, A_2 \dots A_n$ un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle fixé.

Montrer que le périmètre de ce polygone est maximal si et seulement si le polygone est régulier.

Exercice 378. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $p = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - xf'(x))$ existe.
2. On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x) - xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.
3. Montrer alors que $f(x) - mx - p - x \rightarrow +\infty - > 0$.

Exercice 379. Soit $f : [0, +\infty[\mapsto [0, +\infty[$ concave.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que : $\forall x, y \geq 0, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 380. Soit $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.

1. Montrer que : $\forall x \geq 1, f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
2. On pose :
$$\begin{cases} u_n = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n) \\ v_n = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n+1). \end{cases}$$
 Montrer que ces suites convergent.
3. On prend $f(x) = \ln x$. Soit $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ (constante d'Euler). Calculer γ à 10^{-2} près.

Exercice 381. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe dérivable, et $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Etudier le nombre maximal de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par A .

Exercice 382. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b, \exists! c \in]a, b[$ tq $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est monotone sur $] -\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$.
2. En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

Exercice 383. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, D^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe.

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer $D^2 f(x)$.
2. Soit f quelconque et $a < b < c$ tels que $f(a) = f(b) = f(c)$. Montrer qu'il existe $x \in]a, c[$ tq $D^2 f(x) \leq 0$.
On suppose à présent que : $\forall x \in \mathbb{R}, D^2 f(x) \geq 0$.
3. Soient $a < b < c$ et P le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f aux points a, b, c . Montrer que $P'' \geq 0$.
4. Calculer P'' en fonction de a, b, c et $f(a), f(b), f(c)$. En déduire que f est convexe.

Exercice 384. Soit (a_n) une suite bornée de réels. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n}$. Montrer que f est convexe, et n'est pas dérivable aux points a_n .

Exercice 385. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$, avec les $x_i > 0$.

Exercice 386. Soit a, b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Soit ϕ une fonction continue de $[0; 1]$ dans $]a; b[$. Soit enfin f une fonction convexe de $]a; b[$ à valeurs réelles. Alors :

$$f\left(\int_0^1 \phi(x) dx\right) \leq \int_0^1 f \circ \phi(x) dx$$

Exercice 387. Montrer que $\ln(f)$ est convexe ssi $\forall \alpha > 0, f^\alpha$ est convexe.

19 Inclassables.

Exercice 388. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} (n+1) \leq e$.

Exercice 389. Résoudre l'équation matricielle $A = \text{com}(A)$.