Exercices de Colles - Niveau MPSI

Emeric Bouin

23 mai 2011

1 Raisonnements, quelques bribes de logique et de polynômes.

Exercice 1. *Loi de de Morgan.*
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 2. Résoudre $\begin{cases} \mu x + 2y = \nu \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$ selon $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ et en donner une interprétation graphique.

Exercice 3. Montrer les équivalences suivantes :

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B,$$

$$A = B \Longleftrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

Exercice 4. Soient A et B des parties d'un ensemble E, résoudre $A \cup X = B$, d'inconnue X.

Exercice 5. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 6. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, (p, q) \in \mathbb{N}^2 | \quad n = 2^p \cdot (2q + 1).$$

Exercice 7. Trouver l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $f(0) = 1$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x) \cdot \cos(x)$.

Exercice 8. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P = P \circ P$.

Exercice 9. On définit la suite de polynômes suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X.P_{n+1} - P_n, \qquad P_0 = 2, P_1 = X.$$

1. Donner le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
2. Montrer l'égalité suivante : $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$
3. En déduire une expression de $P_n\,(2 \cdot \cos(\theta))$ pour θ réel, ainsi que les racines de P_n.

Exercice 10. Trouver tous les polynômes réels P qui divisent leur polynôme dérivé.

Exercice 11. Soient $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ tels que $x + y + z = 0$. Montrer que :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right]^2.$$

2 Injectivité, surjectivité, bijectivité.

Exercice 12. Soit E un ensemble, A, B, deux parties de E. Soit :

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right).$$

Etudier la surjectivité, l'injectivité, la bijectivité de Φ.

Exercice 13. Soit E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 14. Soit E un ensemble et f une application de E dans E. Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

3 Nombres complexes.

Exercice 15. Le but de l'exercice est de montrer que le réel $\alpha := \dfrac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi}$ est irrationnel.

1. Calculer $\exp(i\alpha\pi)$.
2. Montrer que α est rationnel si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(1 + 2i\sqrt{2}\right)^n = 3^n$.
3. Montrer que $\left(1 + 2i\sqrt{2}\right)^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$ où a_n et b_n sont des entiers tels que $a_n - b_n \not\equiv 0 \mod 3$.
4. Conclure.

Exercice 16. Soit f la fonction définie par :

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & \frac{z+i}{z-i} \end{array} \right).$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Décrire les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$ et $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Exercice 17. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

1. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p$.
2. Soit P un polynôme complexe de degré inférieur ou égal à $n-1$, et $M := \max_{x \in \mathbb{U}_n} \mid P(x) \mid$. Montrer que tous les coefficients de P sont en module bornés par M.

Exercice 18. Soit $z \in \mathbb{C}$ et p, q ses racines carrées. Donner une condition pour que les points d'affixes z, p et q forment un triangle rectangle en z.

Exercice 19. Donner la forme cartésienne de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{2009}$.

Exercice 20. Soit A d'affixe a, B d'affixe b, et $z \in \mathbb{C}$. Donner l'affixe du symétrique de z par rapport à la droite (AB).

4 Trigonométrie, sommes.

Exercice 21. Résoudre $\cos(x) + \cos(3x) = 0$, linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 22. Calculer $\text{cotan}(x) - 2\text{cotan}(2x)$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. Etudier la convergence lorsque n tend vers $+\infty$ à θ fixé.

Exercice 23. Montrer que la courbe représentative de $x \longrightarrow a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$ se déduit des courbes représentatives de $x \longrightarrow \cos(x)$ et $x \longrightarrow \sin(x)$ par des transformations géométriques que l'on précisera.

Exercice 24. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $A_k = \dfrac{1}{\cos(k\theta) \cdot \cos((k+1)\theta)}$ sous forme d'une somme, en déduire $\sum_{k=1}^{n} A_k$ et sa limite éventuelle.

Exercice 25. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Exercice 26. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$ en s'aidant du calcul de $\int_0^1 t^p \text{dt}$ pour $p \geq 0$.

Exercice 27. Résoudre $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

5 Arithmétique.

Exercice 28. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(7n+2)$ est divisible par 6. Même chose pour $n(n+1)(8n+1)$.

Exercice 29. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que ab est un carré parfait. Montrer que a et b le sont aussi. Que dire si a et b ne sont plus premier entre eux ?

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe n entiers consécutifs non premiers.

Exercice 31. *Nombres de Mersenne.*

1. Montrer que $a^p - 1$ est premier seulement si $p \in \mathcal{P}$ et $a = 2$.
2. On pose alors $M_p = 2^p - 1$, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 32. *Nombres de Fermat.*

1. Montrer que $2^n + 1$ est premier seulement si n est une puissance de 2.
2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$, montrer que eux tels nombres distincts sont premiers entre eux.
3. En déduire l'infinité des nombres premiers.

Exercice 33. Trouver le chiffres des unités de $7^{7^{7^7}}$.

Exercice 34. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 35. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrer que si N est la somme de n entiers impairs consécutifs, alors N n'est pas premier.

Exercice 36. Trouver les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\mathrm{PPCM}(x, y) + 11 \cdot \mathrm{PGCD}(x, y) = 203.$$

Exercice 37. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x, y) = 5 \\ \mathrm{PPCM}(x, y) = 60 \end{cases}.$$

Exercice 38. *Triplets Pythagoriciens.*
Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation suivante : $x^2 + y^2 = z^2$.

6 Fonctions usuelles, calculs de primitives.

Exercice 39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désire déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de la fonction cherchée. Celle-ci est désormais notée F_n.
2. Calculer $F_1(x)$.
3. En procédant au changement de variable $x = \tan\theta$, déterminer $F_2(x)$.
4. En s'aidant d'une intégration par parties, former une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.
5. Calculer $F_3(x)$.

Exercice 40. Déterminer une primitive des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

$$\frac{x^5}{1+x^{12}}, \quad \frac{1}{x(x^2-1)}, \quad \frac{x+1}{x^2-x+1},$$
$$\frac{1}{x^2-2x+2}, \quad \frac{x}{x^2+2x+2}, \quad \frac{1}{x(x^2+1)},$$
$$\frac{1}{x^3+1}, \quad \frac{x}{x^3-1}, \quad \frac{x^4+1}{x^4-1},$$
$$\frac{1}{x^4+x^2+1}, \quad \frac{1}{(x^2+x+1)^2}, \quad \frac{1}{x^4+1}.$$

Exercice 41. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}.$$

Exercice 42. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+3)}, \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x+4)}, \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

Exercice 43. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$. Etablir :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + i.\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + C^{te}.$$

En déduire $\lim\limits_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} \frac{1}{1+x^4} \mathrm{dx}$.

Exercice 44. *Intégrales de Wallis.*

Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 45. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(x).$$

Exercice 46. Proposer une primitive pour les fonctions suivantes, en précisant les intervalles de définition :

1. $\frac{1}{(x^3-1)^2}$.
2. $\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$.
3. $\frac{1}{\sin(x)\sin(4x)}$.

7 Equations différentielles.

Exercice 47. Faire une étude qualitative détaillée de $\ddot{y} = -\sin(y)$. On se basera sur le pendule simple pour expliquer la provenance de l'équation et interpréter les différents cas.

Exercice 48. *Entrelacement des zéros 1.*

Soient r et q deux fonctions continues sur $[a, b]$ et telles que $r \leq q$. On considère y, solution de $y" + ry = 0$, et z, solution de $y" + qy = 0$. Montrer que les zéros de y et z sont entrelaçés.

Exercice 49. *Entrelacement des zéros 2.*

Soit $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que toute solution de $y" + (1 + \frac{\lambda}{t^2})y = 0$ admet un zéro dans $]a, a + \pi[$.

Exercice 50. Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in [0,1], \qquad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 51. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$

Exercice 52. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 53. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$,
2. $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$,
3. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$.

Exercice 54. *Lemme de Gronwall.*

Soient f, g deux fonctions continues positives, K et L deux constantes positives telles que :

$$f(t) \leq K + L \cdot \int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s.$$

Montrer que $f(t) \leq K \cdot \exp\left(\int_0^t Lg(s)\mathrm{d}s\right)$.

Exercice 55. Un anneau de masse m coulisse sans frottement sur l'axe des $x > 0$. Il est relié à l'origine A par un ressort de constante de raideur k. On le place en régime d'oscillations forcées en imposant à A un mouvement sinusoïdal : $x_A(t) = x_0 \sin(\Omega t)$. Déterminer le mouvement de la masse m par rapport à sa position d'équilibre, lorsqu'on l'en écarte et que l'on le lâche avec une vitesse initiale nulle.

8 Applications, nombres réels.

Exercice 56. Montrer que la suite $u_n = \sin(n)$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 57. Montrer que $\{\sqrt{m} - \sqrt{n} \quad | \quad m, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 58. Soit une suite u_n telle que $u_n \to +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que $\exp(iu_n)$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Exercice 59. Déterminer toutes les fonctions continues périodiques de périodes 1 et $\sqrt{2}$.

Exercice 60. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est injective si, et seulement si,

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \qquad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

Exercice 61. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. Comparer $f(A \,\Delta\, A')$ et $f(A) \,\Delta\, f(A')$.

Exercice 62. Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists a, b \in A \text{ tq } a < x < b,$$

$$\forall a, b \in A, \quad \frac{a+b}{2} \in A.$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 63. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, et $\mathcal{S}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{S} = \left\{X \subset E | f^{-1}(f(X)) = X\right\}.$$

1. Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion.
3. Soient $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \emptyset$. Montrer que :
$$X \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset.$$
4. Soient X et $Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartienent à $\mathcal{S}$.
5. Montrer que l'application
$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{P}(f(E)) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{pmatrix}$$
est une bijection.

Exercice 64. Soit $f : F \longrightarrow E$ et $f : G \longrightarrow E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $f : G \longrightarrow F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si $g(G) \subset f(F)$. A quelle condition h est-elle unique ?

9 Développements limités.

Exercice 65. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 66. Effectuer les développements limités ou asymptotiques suivants :

1. $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$ à l'ordre 3.
2. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0.
3. $\arctan x$ à l'ordre 3 en 1.

Exercice 67. Développer de deux manières $(1-e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n+2$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p$ pour $p = 0, 1, \dots, n+2$.

Exercice 68.
1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Donner un DL de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n \to \infty$.
4. Obtenir ensuite un DL de x_n à l'ordre le plus grand possible.

Exercice 69. On note $f_n(x) = x\cos^n x$. Soit $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n)$ soit maximal.

1. Existence et unicité de x_n ?
2. Chercher $\lim_{n\to\infty} x_n$.
3. Montrer que $x_n^2 \sim \dfrac{1}{n}$ $(n \to \infty)$.
4. Trouver un équivalent de $f_n(x_n)$.

Exercice 70. Soit $f : x \to \frac{x+1}{x}e^x$.

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si λ est assez grand, la droite d'équation $y = \lambda$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points d'abscisses $a < b$.
3. Montrer que $a \sim \dfrac{1}{\lambda}$, et $e^b \sim \lambda$ pour $\lambda \to +\infty$.
4. Chercher la limite de b^a quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 71. Soit $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,il existe un unique x_n vérifiant $f(x_n) = 1 - \dfrac{1}{n}$. Trouver la limite et un équivalent de la suite (x_n) en $+\infty$.

Exercice 72. Soit u_n une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 73. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive x_n. Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n en fonction de n.

Exercice 74. Pour tout n entier naturel non nul, on donne $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ et trouver un équivalent de $x_n - \ell$.

10 Suites numériques.

Exercice 75. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$.

Exercice 76. Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 77. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$,
2. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$,
3. $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$,
4. $u_n = \frac{n!}{n^n}$,
5. $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$,
6. $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}$,
7. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$,
8. $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$,
9. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$,
10. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$,
11. $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$,
12. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$,
13. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,
14. $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k!$.

Exercice 78. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \to l$.

1. Montrer que si $l < 1$ alors $u_n \to 0$.
2. Montrer que si $l > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
3. Montrer que dans le cas $l = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 79. *Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz.*

Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 80. *Irrationalité du nombre de Néper.*

Soit $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

   On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $e \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $a_q < e < b_q$, puis obtenir une absurdité.

Exercice 81. Soit $\rho > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$. On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

1. Exprimer z_n sous forme d'un produit.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Exercice 82. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $([u_n])$ est-elle convergente ?

Exercice 83. Soit $x \in \mathbb{R}$. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$.

Exercice 84. Soit u_n une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{u_{2n}}{2}$ converge. Montrer que u_n converge et donner sa limite.

Exercice 85. Soient a_n, b_n et c_n trois suites telles que $a_n + b_n + c_n \to 0$ et $\exp(a_n) + \exp(b_n) + \exp(c_n) \to 3$. Que dire de la convergence des trois suites ? (On pourra commencer par le cas ou une des suites est nulle).

Exercice 86. *Suites et approximations Diophantiennes.*

1. *Théorème de Dirichlet.*
   Soit α un irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que :
   $$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}.$$
2. Etudier la convergence de la suite $u_n = \frac{1}{n \sin(n)}$.

Exercice 87. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue et (u_n) une suite de $[0, 1]$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que u_n converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

Exercice 88. *Lemme de l'escalier.*
Soit u_n une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to l$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \to l$.

11 Groupes.

Exercice 89. Soit G un groupe tel que $\forall g \in G, g^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Montrer que Card $K = 2$ Card H.
3. En déduire que Card G est une puissance de 2.

Exercice 90. Soit G un groupe multiplicatif et $\Phi : G \mapsto E$ une bijection. On définit :

$$\forall x, y \in E, \qquad x \star y = \Phi\left(\Phi^{-1}(x) \cdot \Phi^{-1}(y)\right)$$

Montrer qu'il s'agit d'une loi de groupe sur E et qu'alors G et E sont isomorphes.

Exercice 91. *Centre d'un groupe.*
Soit G un groupe multiplicatif et $Z(G) = \{g \in G | \forall h \in G, g \cdot h = h \cdot g\}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe commutatif de G, qui lui est égal si et seulement si G est lui-même commutatif.

Exercice 92. *Groupe des automorphismes.*
Soit G un groupe multiplicatif. On note Aut(G) l'ensemble des isomorphismes $\phi : G \to G$.

1. Montrer que Aut(G) est un groupe pour la loi $\circ$.
2. Déterminer Aut$(\mathbb{Z})$.

3. Pour $a \in G$ on note $\phi_a : G \to G, x \to axa^{-1}$. Montrer que $\phi_a \in \mathrm{Aut}(G)$, et que l'application $a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes.

Exercice 93. *Images directes et réciproques.*

Soit G un groupe additif et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a :
$$f^{-1}(f(H)) = H + \mathrm{Ker} f.$$
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a :
$$f(f^{-1}(H')) = H' \cap \mathrm{Im} f.$$

Exercice 94. *Sous groupes finis de $\mathbb{C}^*$.*

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 95. *Groupe sans sous-groupe non trivial.*

Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non trivial. Montrer que G est monogène, fini, et que Card G est un nombre premier.

Exercice 96. *Groupe d'ordre pair.*

Soit G un groupe fini de cardinal pair.

1. Montrer que l'ensemble des x tq $x^2 \neq e$ est de cardinal pair.
2. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.

12 Géométrie du plan.

Exercice 97. Trouver les points d'affixes z tels que z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle. Un triangle équilatéral ?

Exercice 98. Soit ABC un triangle du plan, et A', B', C' trois points du plan tels que $AB'C, A'CB, AC'B$ soient extérieurs à ABC. Montrer que si les trois triangles extérieurs sont équilatéraux, alors $A'B'C'$ l'est aussi.

Exercice 99. Montrer que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle cirsonscrit à un triangle sont alignés.

Exercice 100. On considère la famille de droites $(\mathcal{D}_a) : (1 - a^2)x - 2ay + (a^2 + 2a - 3) = 0$.

1. Trouver le lieu des points du plan par lesquels passent au moins une droite $(\mathcal{D}_a)$.
2. Trouver le lieu des points du plan par lesquels passent deux droites $(\mathcal{D}_a)$ et $(\mathcal{D}'_a)$ orthogonales.

Exercice 101. Soit Γ un cercle et $A, B, C \in \Gamma$. On définit C' comme intersection des tangentes à A et B. Idem pour A' et B'. Montrer que les trois droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.

Exercice 102. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe articulé (les cotés sont de longueurs fixées mais les angles varient). Montrer que l'aire du quadrilatère est maximale lorsque les quatre sommets sont cocycliques.

Exercice 103. Soient $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$, (π) le plan d'équation $ux + vy + wz = 0$, $(\mathcal{D}_\infty)$ la droite d'équation $y - \alpha x = a - z = 0$, $(\mathcal{D}_2)$ la droite d'équation $y = z = 0$, $(\mathcal{D}_3)$ la droite d'équation $y + \alpha x = a + z = 0$. On note enfin A (resp B, C) le point d'intersection de $(\mathcal{D}_1)$ $(resp\,(\mathcal{D}_2)\,,(\mathcal{D}_3))$ avec (π).

Donner une CNS pour que A, B, C soient alignés.

Exercice 104. Trouver le lieu des points ou on peut mener deux tangentes à une parabole, orthogonales.

Exercice 105. *Homographies.*
On définit :

$$\mathcal{H} = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \quad | \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$$

avec la convention du " point à l'infini " : $h(z) = \infty$ si $cz+d=0$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est engendré par $z \mapsto az+b$ et $z \mapsto \frac{1}{z}$ comme groupe pour la loi $\circ$.
2. Exemples : Donner l'image de $\mathbb{R}$ par $z \mapsto \frac{1}{z}$, l'image de $\mathbb{U}$ par $z \mapsto \frac{1}{z}$, celle de $\mathbb{U}$ par $z \mapsto \frac{z}{iz+1}$.
3. Montrer qu'un élément de $\mathcal{H}$ conserve les "cercles-droites". On pourra montrer qu'un cercle-droite s'écrit $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \quad a,c \in \mathbb{R}, |b|^2 > ac$.

Exercice 106. Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan, $k>0$. Trouver

$$\{M \quad | \quad d(M,\mathcal{D}) = k \cdot d(M,\mathcal{P})\}.$$

Exercice 107. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ pour que les points d'affixes $\dfrac{(z-u)(1-zv)}{z}$ soient tous alignés sur la droite réelle lorsque z parcourt $\mathbb{U}$.

13 Courbes paramétrées en cartésiennes.

Exercice 108. *Bicorne.*
Etudier la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)} \end{cases}$.

Exercice 109. Etudier la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3-t}{2t-1} \\ y(t) = tx(t) \end{cases}$. On précisera les points doubles, les inflexions, les données relatives à l'asymptote et aux branches paraboliques.

Exercice 110. Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = 2\cos^2(t) + \ln(|\sin(t)|) \end{cases}.$$

Exercice 111. Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \left(\dfrac{t^2-2}{t^4-1}\right)^{1/2} \\ y(t) = tx(t) \end{cases}.$$

Exercice 112. *Folium de Descartes.*
Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = tx(t) \end{cases}.$$

Donner en plus une équation cartésienne de la courbe.

Exercice 113. Etudier la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$. On précisera les points doubles, les inflexions, les données relatives à l'asymptote et aux branches paraboliques. Montrer par ailleurs que les tangentes au point double sont orthogonales.

Exercice 114. Etudier la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{t^3-1} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^3-1} \end{cases}$. Montrer de plus :

1. Que les points de paramètres t, u, v sont alignés si et seulement si
$$tuv = t + u + v + 1.$$
2. Que $\mathcal{C}$ admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.

Exercice 115. *La trisectrice de Maclaurin.*

Soit $a > 0$, étudier la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = a\dfrac{3-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = tx \end{cases}$. Puis :

1. Donner une équation cartésienne de la courbe.
2. Calculer l'aire de la boucle.
3. On considère le point A défini par $0\vec{A} = \frac{2}{3}0\vec{S}$. Soit M un point de paramètre $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$, on définit le point P par $OP = PA$ et O, P, M alignés. Montrer alors que $OP = PA = AM$ et en déduire comment trisecter un angle α donné.

Exercice 116. *Tasse de café.*

Lorsque l'on éclaire convenablement une tasse de café, on peut constater l'apparition d'une courbe lumineuse au fond de la tasse, s'apparentant à un coeur. Proposer une équation pour la courbe, et l'étudier. On supposera que la tasse est circulaire, que les rayons arrivent parallèlement, et que la situation est plane.

Exercice 117. *Tractrice.*

Etudier la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases}$.

Soit $T(t)$ un point de la courbe d'abscisse positive, et M le point d'intersection de la tangente à la courbe au point T avec (Ox). Montrer que MT est constante.

14 Polynômes.

Le but des quatre exercices suivants est de les combiner pour obtenir le :

Théorème. *(Pólya) Soit P un polynôme complexe unitaire de degré $n \geq 1$. Soit $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leq 2\}$, et $\mathcal{R}$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur l'axe réel. Alors il existe des intervalles $I_1, \cdots, I_t$ de la droite réelle dont la réunion recouvre $\mathcal{R}$ et vérifiant la propriété :*

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda\left(I_i\right) \leq 4.$$

Exercice 118. Premiers exemples et premières propriétés.

1. Montrer que la borne est atteinte pour un polynôme de degré 1, c'est à dire qu'il des intervalles $I_1, \cdots, I_t$ de la droite réelle dont la réunion recouvre $\mathcal{R}$ et vérifiant la propriété :

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda\left(I_i\right) = 4.$$

2. On pose pour cette question $P(z) = z^2 - 2$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} | \exists y, x + iy \in \mathcal{C}\}$.
   (b) Montrer que $x + iy \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 \leq 4\left(x^2 - y^2\right)$.
   (c) Représenter le lieu des points vérifiant la condition précédente, donner le nom de la courbe délimitant le domaine, et prouver le théorème dans ce cas particulier. La borne est elle atteinte ?
3. Justifier que le théorème est en fait vrai pour n'importe qu'elle droite du plan complexe, et pas seulement la droite réelle.
4. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il toujours un intervalle ? On pourra considérer

$$P(x) = x^2(x-3).$$

5. Montrer cependant que si P est un polynôme réel, alors $\mathcal{R}$ est une réunion finie d'intervalles fermés disjoints.

Exercice 119. *Théorème de Chebyshev.* Montrer le :

Théorème. *Soit p un polynôme réel unitaire de degré $n \geq 1$. Alors :*

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pour cela, on pourra :
– Se ramener à l'utilisation de polynômes trigonométriques en cosinus,
– Calculer le coefficient dominant λ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,
– Montrer alors le résultat souhaité par l'absurde,
– Constater en plus que les polynômes de Chebyshev vérifient l'égalité.

Exercice 120. 1. Si $z_1, \cdots, z_n$ sont les racines de P, on définit le polynôme p par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad p(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(x - \mathrm{Re}(z_i)\right).$$

On s'intéresse alors à $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\}$. Montrer que $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$. En déduire que si l'on montre le théorème pour $\mathcal{P}$ au lieu de $\mathcal{R}$ la preuve est terminée.

2. Déduire du théorème précédent le corollaire :

   Corollaire. *Soit p un polynôme réel unitaire de degré $n \geq 1$. Supposons que $|p(x)| \leq 2$ pour tout x de l'intervalle $[a, b]$. Alors $b - a \leq 4$.*

   Expliquer pourquoi ce corollaire répond partiellement à la question.

Exercice 121. Il reste donc à prouver le :

Théorème. *Soit p un polynôme réel unitaire, de degré strictement positif, dont toutes les racines sont réelles. Alors l'ensemble $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\}$ peut être recouvert par des intervalles de longueur totale au plus égale à 4.*

On note alors $p(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ et $\mathcal{P}=\{x\in\mathbb{R}:|p(x)|\leq 2\}=\bigcup_{k=1}^{t} I_k$, ou les I_k sont distincts et classés de gauche à droite sur l'axe réel.

1. Montrer que chaque intervalle I_j contient au moins une racine de p. On pourra remarquer et prouver que pour un polynôme non constant qui n'a que des racines réelles, $p'(x)^2 \geq p(x)p''(x)$.
2. Supposons alors que I_t contienne m racines de p, comptées avec multiplicités.
   (a) Conclure si $m=n$.
   (b) On admet que dans l'autre cas, on peut trouver un polynôme q unitaire de degré supérieur ou égal à 1, tel que $\mathcal{Q}$ est un intervalle de longueur $\lambda(\mathcal{Q}) \geq \sum_{i=1}^{t}\lambda(I_i)$. Conclure.

Exercice 122. Quels sont les polynômes complexes dont l'image est incluse dans $\mathbb{R}$?

Exercice 123. Soient $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ tels que $\forall z\in\mathbb{Z}, |P(z)|=|Q(z)|$. Montrer qu'il existe $u\in\mathbb{U}$ tel que $P=uQ$.

Exercice 124. *Théorème de Gauss-Lucas.*
Soit P un polynôme complexe non constant. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

15 Algèbre linéaire.

Exercice 125. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$
2. $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$
3. $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=E$
4. $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$
5. $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E$

Exercice 126. Soient E,F deux espaces vectoriels et $f:E\mapsto F$ linéaire.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

Exercice 127. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f:E\mapsto\mathbb{K}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H=\mathrm{Ker} f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f=\mathbb{K}$.
2. Soit $\vec{u}\in E\setminus H$ et $F=\mathrm{vect}(\vec{u})$. Montrer que $F\oplus H=E$.

Exercice 128. Etudier la liberté des familles suivantes :
- $E=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$, $\mathcal{F}=(\sin,\cos)$.
- $E=\{f:\mathbb{R}^{+*}\mapsto\mathbb{R}\}$, $\mathcal{F}=(f_a:x\longmapsto x^a),\ a\in\mathbb{R}$.
- $E=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$, $\mathcal{F}=(f_a:x\longmapsto|x-a|),\ a\in\mathbb{R}$.

Exercice 129. *Polynômes trigonométriques.*
Soit E l'ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F le sev engendré par les fonctions $f_n : x\mapsto\cos(nx)$, $n\in\mathbb{N}$, et G le sev engendré par les fonctions $g_n : x\mapsto\cos^n x$, $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $F=G$.

Exercice 130. *Nombres algébriques.*

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Montrer que la famille $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ est libre.
3. Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

Exercice 131. Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^*, f^{p_x}(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent et donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 132. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Donner le rang de $f \longrightarrow u \circ f \circ v$.

Exercice 133. Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} f^2 = 0 \\ \exists v \in \mathcal{L}(E), \quad h \circ f + f \circ h = id_E \end{cases}.$$

Exercice 134. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercice 135. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ f = 0$. Montrer :

$$\exists g, h \in \mathcal{L}(E), \quad \begin{cases} f = g \circ h \\ h \circ g = 0 \end{cases}.$$

Exercice 136. Soient p et q des projecteurs tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur et décrire son noyau et son image.

Exercice 137. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$ puis que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$.

Exercice 138. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie. On définit ϕ par :

$$\phi(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ f \circ g^{-1}, \qquad f \in \mathcal{L}(E).$$

Montrer que $\mathrm{Tr}(\phi) \in \mathbb{N}$.

Exercice 139. Dans un espace vectoriel de dimension finie, on considère n vecteurs formant une famille de rang r. On en extrait p, ces vecteurs formant une famille de rang s. Montrer l'inégalité :

$$r \leq s - p + n.$$

Exercice 140. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

Exercice 141. Soient $u_1, \cdots, u_n$ n nilpotents qui commutent dans un espace vectoriel de dimension n. Que vaut $u_1 \circ \cdots \circ u_n$?

Exercice 142. Que dire d'un endomorphisme qui stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension k d'un espace vectoriel de dimension n, ou k est fixé dans $[|1, n-1|]$?

Exercice 143. Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad | \quad f(0) + f(1) = 0\}$. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel, et en donner un supplémentaire dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 144. Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad | \quad f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel, et en donner un supplémentaire dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 145. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3I = 0$. Montrer que $Ker(f-I) \oplus Ker(f-3I) = E$, et décrire géométriquement f.

Exercice 146. Soit (f_k) la famille des $e^{(k\cdot)}$. Montrer que la famille est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 147. Montrer qu'il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k) = 0.$$

Exercice 148. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe p tel que $f^p = 0$, et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire $f^n = 0$.

Exercice 149. Soient f, g deux formes linéaires telles que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Montrer qu'elles sont proportionnelles.

Exercice 150. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, et π_Q l'application qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par Q. Montrer qu'il sagit d'un projecteur, et donner son noyau et son image.

Exercice 151. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $P_k(x) \in \mathbb{Z}$.
3. Trouver $\{P | \forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 152. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. La famille de fonctions

$$(\cos(x+a), \cos(x+b), \cos(x+c))$$

est elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 153. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Exercice 154. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Etablir $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$.
2. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 155. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$.

16 Fonctions, limites de fonctions.

Exercice 156. Etudier $f(x) = \sin(\ln(x))$, $f(x) = x.\sin(\frac{1}{x})$.

Exercice 157. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$, qui admet une limite en ∞. Montrer que f est constante.

Exercice 158. Soit f une fonction continue à valeurs réelles, admettant des limites en $\pm\infty$. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 159. Donner la limite en ∞ de $f(x) = e^x[\frac{1}{x}]$.

Exercice 160. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1) - f(x) \underset{x\to\infty}{\to} l$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \to l$.

Exercice 161. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner ses variations.
2. Montrer qu'il existe u définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_x^{u(x)} e^{t^2}dt = 1$. Démontrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa monotonie.
3. Montrer que le graphe de u est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice du repère.
4. Etudier les branches infinies du graphe de u.

Exercice 162. Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que $\sum_{k=1}^n a_k\text{cotan}(kx)$ ait une limite finie en 0, et la préciser.

Exercice 163. On pose : $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$.
Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$, $\mathcal{C}_k$ au voisinage de 0.

Exercice 164. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}^{+*}$ telle que :

$$\forall x, y > 0, \qquad f(xf(y)) = yf(x)$$

et

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

1. Montrer que f est involutive.
2. Montrer que f conserve le produit. Que peut-on dire de la monotonie de f, de sa continuité ?
3. Trouver f.

Exercice 165. Trouver la limite de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

17 Matrices.

Exercice 166. *Matrices stochastiques.*
Soit $\mathcal{D} = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \forall\ i, j,\ a_{ij} \geq 0, \forall\ i, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par multiplication.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

Exercice 167. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *centro-symétrique* si pour tous i, j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$. Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB. Montrer aussi que si A est centro-symétrique et inversible alors A^{-1} est aussi centro-symétrique.

Exercice 168. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\alpha X + (\mathrm{Tr} X)A = B.$$

Exercice 169. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $X^2 + X = A$.

Exercice 170. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n et interpréter le résultat.

Exercice 171. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 172. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose

$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 173. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

Exercice 174. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 175. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$.
3. Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$?

Exercice 176. Calculer le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 177. Soit A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$. Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 178. Donner le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 179. *Crochet de Lie.* Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Trouver le rang de $\Phi : M \mapsto AM - MA$.

18 Continuité.

Exercice 180. Montrer que les fonctions sinus et racine carrée sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 181. Soit f une fonction réelle uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer l'existence de réels a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq a \cdot |x| + b.$$

Exercice 182. Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y).$$

Exercice 183. *Points fixes.*

1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $I \subset f(I)$ ou $f(I) \subset I$, alors f admet un point fixe dans I.
2. Soit f une fonction croissante de $[0,1]$ dans lui-même. Montrer qu'elle admet un point fixe.

Exercice 184. Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f - g$ s'annule.

Exercice 185. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Trouver les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $(f \circ f)(x) = ax + b$.

19 Dérivabilité, fonctions convexes.

Exercice 186. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Exercice 187. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

aie une limite finie en 0.

Exercice 188. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. Montrer que si la limite est finie et négative, alors f est décroissante.

Exercice 189. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $|f|$ admet une dérivée à droite et à gauche en tout point.

Exercice 190. Soit f dérivable ayant une limite en $+\infty$. Que dire de f' en $+\infty$?

Exercice 191. Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe α et β tels que $f(x) \sim \frac{\alpha}{x^\beta}$.

Exercice 192. *Règle de l'Hospital.* Soient $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivables. On suppose de plus que la dérivée de g ne s'annule pas.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. En déduire la règle de l'Hospital :
Si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$.

Exercice 193. Trouver une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont nulles en 0.

Exercice 194. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis à une fonction bien choisie, que la série de terme général $\frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

Exercice 195. Que vaut
$$\int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{x})dx + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{x})dx?$$

20 Coniques.

Exercice 196. Déterminer la nature et les éléments des coniques suivantes :

1. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0$.
2. $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Exercice 197. *Croisillons sur une conique.*

Pour $p > 0$ on donne la courbe Γ d'équation $y^2 = 2px$. Soit un carré $ABCD$ tel que $B, D \in \Gamma$ et A, C appartiennent l'axe de symétrie de Γ.

1. Quelle relation lie les abscisses de A et C ?
2. On construit une suite (M_n) de points de Ox, M_n d'abscisse x_n, telle que $x_{n+1} > x_n$ et M_nM_{n+1} est la diagonale d'un carré dont les deux autres sommets appartiennent à Γ. Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to \infty$.

21 Suites récurrentes.

Exercice 198. *Suite logistique.*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $f_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$. Etudier la suite récurrente $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$. On tracera une ébauche de diagramme de bifurcation, c'est à dire un diagramme présentant les points fixes stables en fonction de λ, pour les petites valeurs de λ.

Exercice 199. Etudier la suite récurrente définie par $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+u_n^2}$. Donner un développement à l'ordre 2 de u_n.

Exercice 200. Etudier la suite récurrente définie par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(u_n)^5}$, avec $u_0 > 0$.

Exercice 201. Soit $\alpha > 0$, $u_0 > 0$ et la suite récurrente définie par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

1. Si $\alpha \leq 1$, montrer que la suite diverge vers l'infini et donner un équivalent de u_n.
2. Si $\alpha > 1$, montrer que la suite converge (vers une limite notée l) et donner un équivalent de $u_n - l$.

Exercice 202. Soit la suite définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Déterminer un développement asymptotique de u_n.

22 Courbes en polaires.

Exercice 203. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Trouver les courbes qui intersectent toutes les droites passant par l'origine avec un angle α.

Exercice 204. Etudier la courbe en polaires suivante :

$$\rho(\theta) = a\frac{\theta}{\theta - 1}.$$

Exercice 205. Etudier la courbe en polaires suivante :

$$\rho(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2\cos(\theta) - 1}.$$

Exercice 206. Soit $\mathcal{C}$ la courbe $\rho = a(1 + \cos(\theta))$.

1. Montrer qu'il existe trois points de $\mathcal{C}$ dont la tangente a une direction donnée à l'avance. Donner l'isobarycentre de ces trois points.
2. Trouver l'ensemble des milieux des points M et M' tels que $\vec{OM} \perp \vec{OM}'$.
3. Calculer l'aire de la surface intérieure à la courbe.
4. Soit M un point de la cardioïde, C le centre de courbure en M et I le projeté orthogonal de $\mathcal{C}$ sur la droite OM. Quelle est la courbe décrite par le point I ? Enoncer et démontrer une réciproque.
5. Lieu des intersections des tangentes à la cardioïde aux angles θ et $\theta + \pi$ quand θ varie.
6. On appelle podaire d'une courbe vue d'un point A, l'ensemble des projections de A sur les tangentes de la courbe. Quelle est la courbe admettant la cardioïde comme podaire vue de O ?

Exercice 207. Proposer un paramétrage en polaire pour modéliser une toile d'araignée.

Exercice 208. *Cochléoïde.*

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$.
2. Une droite passant par O coupe $\mathcal{C}$ en un certain nombre de points. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points sont concourantes.

23 Intégration.

Exercice 209. Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que pour toute fonction g continue par morceaux, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Que dire de f ?

Exercice 210. *Lemme de Riemman-Lebesgue.* Démontrer le lemme de Riemman-Lebesgue dans les cas cas suivants :

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. f est en escalier.
3. f est continue.

Exercice 211. *Inégalité de Jensen.*

Soit f une fonction convexe sur $[a,b]$ et à valeurs réelles, et ϕ une fonction continue de $[0,1]$ dans $]a,b[$. Montrer que

$$f\left(\int_0^1 \phi(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 f \circ \phi(x)\,dx$$

Exercice 212. Pour $0 < a < b$, déterminez

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{t=ax}^{bx} \frac{1 - \cos u}{u^3} du.$$

Exercice 213. Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \qquad \int_{t=a}^{b} t^k f(t) dt = 0.$$

Démontrer que f s'annule au moins n fois sur $]a,b[$.

24 Déterminants.

Exercice 214. *Déterminants classiques à savoir calculer.*

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

1. *Déterminant de Vandermonde.*
   $V_{i,j} = \alpha_i^{j-1}$.
2. *Déterminant de Cauchy.*
   $C_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_j}$
3. *Déterminant de Hurwitz.*
   $$H = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$
   avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 215. $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Grâce à un calcul par blocs, montrer $\det(I - AB) = \det(I - BA)$, pour A et B carrées d'ordre n. Généraliser à des matrices rectangulaires.

Exercice 216. Prendre son numéro de téléphone, retirer le premier 0, l'écrire sous forme de déterminant de taille 3 et le calculer.

Exercice 217. Soient A, B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2)$ est positif. Le résultat est il toujours valable si A et B ne commutent plus ?

25 Espaces euclidiens.

Exercice 218. Donner une condition sur p pour que $\Phi(P,Q) = \sum_{i=0}^{p} P(i)Q(i)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$, et donner une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 219. Trouver
$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} \left(\sin(x) - ax^2 - bx\right)^2 dx.$$

Exercice 220. Trouver
$$\min_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \exp(-x)\left(1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2 dx.$$

Exercice 221. Soit E un espace euclidien et F, G deux sev de E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. Montrer que
$$p_F + p_G - p_{F\cap G} = Id$$
et
$$p_F \circ p_G = p_F \circ p_G = p_{F\cap G}.$$

Exercice 222. Trouver un produit scalaire sur $\ell^2 = \left\{u_n \middle| \sum u_n^2 < \infty\right\}$. On montrera soigneusement que c'est un espace vectoriel.

Exercice 223. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver
$$\min_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(m_{ij} - a_{ij}\right)^2.$$

Exercice 224. Existe il des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariantes par similitude ? Des semi-normes ?

Exercice 225. Soit $a \in \mathbb{R}^3$ et $f_a(x) = a \wedge x$. Caractériser $\exp(f_a)$, et généraliser cela à une matrice antisymétrique de taille n.

26 Courbure.

Exercice 226. *R2-D2.*

On considère un robot à deux roues motrices. Trouver quelles sont les vitesses $v_1(t)$ et $v_2(t)$ à imposer aux roues pour que le robot décrive une trajectoire donnée à l'avance.

Exercice 227. Soit P un polynôme à deux variables. En utilisant le théorème des fonctions implicites, trouver la courbure de $\{P(x,y) = 0\}$ en un point donné de la courbe. On supposera que l'on peut remplir les conditions requises par le théorème. Faire le calcul dans le cas du polynôme $P(x,y) = ax^2 + by^2 - 1$, et retrouver alors la courbure d'une ellipse.

27 Fonctions de plusieurs variables.

Exercice 228. Soit f la fonction définie par :
$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 y \end{pmatrix}.$$

Trouver les extremas de f sur
$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Exercice 229. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), 2xy) \end{pmatrix}.$$

Déterminer f de sorte que $\mathrm{d}\phi_{(x,y)}$ soit une similitude pour tout (x,y).

Exercice 230. Soit $u^0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha u, \qquad u(0,x) = u^0(x).$$

Dessiner l'allure des solutions pour des temps donnés et expliquer le phénomène. Pour quelles valeurs du paramètre α l'EDP est elle physiquement satisfaisante ? Estimer alors $\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\mathrm{dx}$ (On pourra prendre une donnée initiale à support compact).

Exercice 231. Déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a,$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On utilisera le changement de variable : $u = x + y$, $v = x - y$.

Exercice 232. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0,\ y > 0\}$, et $b \in \mathbb{R}$. Trouver $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = b.$$

On utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$, ou alors le passage en coordonnées polaires.

Exercice 233. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1)f$$

On posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

Exercice 234. Trouver les extremas sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :
- $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$
- $f(x,y) = x\exp(y) - y\exp(x)$
- $f(x,y) = x^2y^2(1 + 3x + 3y)$

Exercice 235. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Etudier le caractère $\mathcal{C}^2$ de f. On fera une remarque sur le caractère homogène de la fonction f.

28 Inclassables.