École Normale Supérieure de Lyon **Année 2013–2014**

Département de Mathématiques **Analyse-EDP TD 1***

Distributions - Notions Topologiques

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1 Quelle topologie pour les fonctions tests?

L'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \mathcal{E}(\Omega)$ (sans condition sur le support) muni de la topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées est **un espace de Fréchet**. De même si on fixe un compact K de Ω, l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ des fonctions tests *à support inclus dans* K, muni de la même topologie, est toujours un espace de Fréchet. Par contre si l'on considère cette même topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, celle-ci est toujours métrisable (c'est un sous-espace de $\mathcal{E}(\Omega)$) mais l'espace métrique considéré n'est alors plus complet : le complété est en fait $\mathcal{E}(\Omega)$! Ceci motive l'introduction d'une nouvelle topologie, restreignant la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition. *On fixe $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω. L'espace $\mathcal{D}(\Omega) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ sera muni de la topologie ...* ⚠ **limite inductive** ⚠ *... des $\mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$.*

Proposition. *Les suites convergentes de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont les suites dont les supports restent dans un compact fixe de Ω et telles que les dérivées convergent toutes uniformément sur ce compact.*

Théorème. *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$. On suppose l'existence d'un compact K contenant tous les supports des φ_n. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction φ et si*

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \sup_{x\in\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| < +\infty,$$

alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans cet espace.

2 Distributions

Définition. *On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual topologique (formes linéaires continues) de $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est l'espace des distributions sur Ω.*

On en vient à la proposition suivante importante dans la pratique:

Proposition. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Les Assertions Suivantes Sont Équivalentes (ASSE ⚽):*

(i) T *est une distribution.*

(ii) Pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $(\langle T, \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\langle T, \varphi\rangle$.

(iii) **Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier $m_K \in \mathbb{N}$ et une constante C_K, tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,**

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha|\leq m_K} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Remarque. *1. Dans le cas où l'entier m_K de la dernière propriété peut être choisi indépendamment de K, on dit que T est* **d'ordre fini**. *L'ordre de T est alors le plus petit entier vérifiant cette propriété.*

2. **La propriété** *(iii)* **précédente revient exactement à dire que T est continue sur tous les espaces de Fréchet $\mathcal{D}_K(\Omega)$, où K parcoure les compacts de Ω.**