École Normale Supérieure de Lyon **Année 2013–2014**

Département de Mathématiques **Analyse-EDP DM 1**

Devoir à la maison obligatoire 1.

Ce devoir est à rendre rédigé proprement et sur copie soulignée et parfumée$^{\heartsuit}$ à Emeric Bouin ou à Loïc Bourdin au plus tard le 13 février 2014.

Transportons nous dans les bois ...

Exercice 1 (Ondes de raréfaction - Baby case). Pour $u^0(x) = x$, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

On tracera les caractéristiques **dans le plan** (x,t). Que se passe-t-il pour $u_0(x) = -x$?

Exercice 2 (Exemple sur un sous-espace avec condition de bord). On considère l'équation de transport suivante en domaine semi borné :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \\ u(t=0,x) = f(x), & \forall x \geq 0, \\ u(t, x=0) = g(t), & \forall t \geq 0, \end{cases}$$

où f et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $c > 0$. Donner les conditions de compatibilité entre f et g pour que le problème admette une solution au sens classique. Que se passe-t-il pour $c < 0$?

Exercice 3 (Exemple sur un sous-espace). Pour $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} x\partial_t u + t\partial_x u = 0, & (t,x) \in \ \Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > t > 0\right\}, \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

Quel est le temps d'existence d'une solution classique ? On tracera les caractéristiques **dans le plan** (x,t).

Distribuons notre pain de ce jour :

Exercice 4.

1. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que :

$$\langle S, \phi \rangle = 0, \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \text{ tel que } \langle T, \phi \rangle = 0.$$

   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S = \lambda T$.

2. On suppose que $d = 1$ et que Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $T' = 0$ est une fonction constante sur Ω.

Exercice 5. Calculer les limites des suites suivantes au sens des distributions :

$$n^3\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}} + \frac{2}{n}\delta_0'\right), \qquad T_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}, \qquad T_n(x) = n\sin(nx)1_{x>0}.$$

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la série

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(2^n \cdot 2\pi x)}{2^n},$$

et pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \sin(2^n \cdot 2\pi x)$.

1. Montrer que f est continue et nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$ (*chercher des références !*). Justifier que f admet malgré tout une dérivée au sens des distributions.
2. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\phi(x)dx = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(2^{-(n+1)})$$
3. En déduire que la suite
$$s_k := \sum_{n=0}^{k} u_n,$$
converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on notera $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
4. Calculer la dérivée au sens des distributions de f.

Exercice 7.

⚠ Exercice fondamental ⚠

On considère le problème de type Burgers suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \\ u(\cdot,0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. (Rankine-Hugoniot) Sous quelle condition portant sur u^+, u^- et $s \in \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$u(x,t) = u^-\mathbf{1}_{x<st} + u^+\mathbf{1}_{x>st}$$
est-t-elle solution de l'équation de Burgers dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+)$? *On pensera bien à appliquer la formule des sauts pour calculer efficacement.*
2. (Non-unicité des solutions faibles) Montrer qu'il existe une infinité de fonctions u de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux vérifiant (1) au sens des distributions sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$ ainsi que la condition initiale $u_0(x) = \frac{x}{|x|}$.