Quelques idées pour la correction du devoir à la maison 1.

Exercice 1. Supposons que u soit une solution classique de l'équation. Écrivons l'équation des caractéristiques :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{dx}{dt}(t) = u(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0.$$

Pour résoudre cette équation, nous devons connaitre la valeur de u le long des caractéristiques. Si l'on appelle $v(t) := u(t, x(t))$, cette quantité vérifie :

$$\frac{dv}{dt}(t) = \partial_t u(t, x(t)) + \dot{x}(t)\partial_x u(t, x(t)) = 0.$$

La solution u est donc constante le long des caractéristiques ! On en déduit

$$v(t) = u(t, x(t)) = v(0) = u^0(x_0), \qquad x(t) = x_0 + tu^0(x_0) = x_0(1 + t).$$

Ainsi la caractéristique qui passe par le point (t, x) a pour pied $x_0 = \frac{x}{1+t}$. On en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad u(t, x) = \frac{x}{1 + t}.$$

Toute la masse fuit à l'infini, c'est une *onde de raréfaction*. Dans le cas où $u_0(x) = -x$, on trouve de la même façon $u(t, x) = \frac{x}{t-1}$, ce qui contraint une solution classique à n'être définie que sur $[0, 1[$.

Exercice 2. On traite d'abord le cas $c > 0$. Les caractéristiques sont les droites $x(t) = x_0 + ct$, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, et la solution est constante le long des caractéristiques. Prenons $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, et remontons la caractéristique qui passe par ce point. Du fait du problème de bord, on a alors deux cas (voir le dessin pour visualiser ces deux cas) :

- Soit $x - ct > 0$, dans ce cas on peut remonter la caractéristique jusqu'à son pied $x_0 = x - ct$, mézalor $u(t, x) = u(0, x_0) = f(x - ct)$.
- Soit $x - ct < 0$, dans ce cas la caractéristique atteint $x = 0$ en $s := t - \frac{x}{c}$, et donc $u(t, x) = u(s, 0) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$.

Posons (uniquement par commodité) $\xi := x - ct$ la variable de translation. La solution s'écrit

$$u(t, x) = u(\xi) := \begin{cases} f(\xi), & \text{si } \xi \geq 0, \\ g\left(-\frac{\xi}{c}\right), & \text{si } \xi \leq 0. \end{cases}$$

Ainsi la solution est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $f(0) = g(0)$ (continuité) et $f'(0) = -\frac{1}{c}g'(0)$ (continuité de la dérivée).

Qualitativement, dans le cas où $c < 0$, la donnée initiale se prend le mur à vitesse $|c|$. Il faut donc que la valeur que l'on fixe à la solution sur le mur soit à tout instant celle de la solution calculée par la méthode des caractéristiques. Mathématiquement, les caractéristiques sont de la forme $x(t) = x_0 + ct$. Les seules caractéristiques importantes dans ce cas sont celles avec $x_0 \geq 0$ (cf dessin). Une caractéristique qui part de $x_0 \geq 0$ touche le mur $x = 0$ en $t = -\frac{x}{c}$. La solution est constante le long de ces segments de droite, il faut donc que les valeurs de la solution aux deux bouts du segment soient égales, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad f(-ct) = g(t).$$

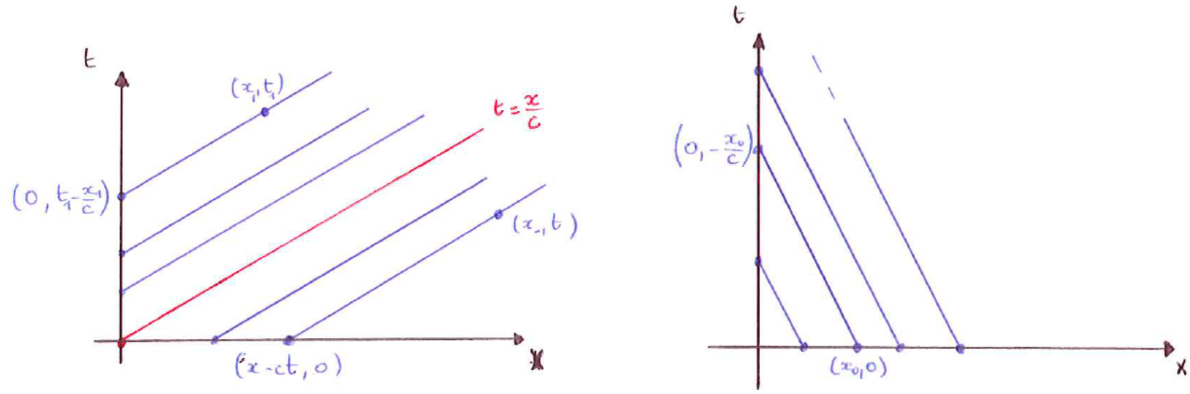

Figure 1: Le cas $c > 0$ (à gauche), puis le cas $c < 0$ (à droite).

Exercice 3. On résout à nouveau l'équation des caractéristiques, sur laquelle la solution est constante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{dx}{dt}(t) = \frac{t}{x(t)}, \qquad x(0) = x_0,$$

dont la solution s'obtient en multipliant par x les deux membres et en écrivant :

$$\frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{dt}(t) = t, \qquad x(0) = x_0,$$

ce qui donne $x(t)^2 = x_0^2 + t^2$. On en déduit l'expression de la solution :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \forall x \geq t, \qquad u(t,x) = u_0\left(\sqrt{x^2 - t^2}\right).$$

La solution existe en tout temps, mais le domaine de définition (en x) dépend de t. *Ceci n'était sûrement pas clair dans l'intitulé de la question, nos excuses. Toute réponse juste sera évidemment acceptée !*

Exercice 4. 1. Cette question est une question d'algèbre linéaire. Soit $T \neq 0$ (sinon S est directement nulle car nulle sur toute fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). Alors il existe une fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\langle T, \psi \rangle \neq 0$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $\Phi = \varphi - \frac{\langle T,\varphi\rangle}{\langle T,\psi\rangle}\psi$ est aussi une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et de plus $\langle T, \Phi \rangle = 0$. On a donc par la propriété vérifiée par S :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad 0 = \langle S, \Phi \rangle = \langle S, \varphi \rangle - \frac{\langle T, \varphi \rangle}{\langle T, \psi \rangle} \langle S, \psi \rangle,$$

d'où l'on déduit que $S = \lambda T$, avec $\lambda = \frac{\langle S,\psi\rangle}{\langle T,\psi\rangle}$.

2. On écrit $\Omega =]a,b[$. Dire que $T' \equiv 0$ c'est dire que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle T, \varphi' \rangle = 0$. On remarque que lorsque φ est à support compact, alors nécessairement $\int_a^b \varphi'(x)dx = 0$. Considérons donc la distribution associée à la fonction constante égale à 1 :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle S, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

si bien que

$$\mathrm{Ker}(S) = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_a^b \varphi(x)dx = 0 \right\}.$$

Montrons alors que $\mathrm{Ker}(S) \subset \{\varphi', \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$. Pour cela, on prend $\psi \in \mathrm{Ker}(S)$, et on définit $\varphi(x) = \int_a^x \psi(x)dx$. Alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ car $\mathrm{Supp}(\psi) \subset]a,b[$ et $\varphi' = \psi$.

Il vient finalement que

$$\mathrm{Ker}(S) = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_a^b \varphi(x)dx = 0 \right\} \subset \mathrm{Ker}(T),$$

et donc par la question précédente T est constante.

Exercice 5. 1. Pour la première suite, on a pour toute fonction test φ (attention au $-$ dans la dérivée du Dirac),

$$\langle T_n, \varphi \rangle = n^3 \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n}\varphi'(0) \right).$$

On effectue alors les développements limités suivants de φ à l'ordre 4 en 0 :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) + \frac{1}{2n^2}\varphi''(0) + \frac{1}{6n^3}\varphi^{(3)}(0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

$$\varphi\left(-\frac{1}{n}\right) = \varphi(0) - \frac{1}{n}\varphi'(0) + \frac{1}{2n^2}\varphi''(0) - \frac{1}{6n^3}\varphi^{(3)}(0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

On déduit alors que

$$\langle T_n, \varphi \rangle = n^3 \left(\frac{1}{3n^3}\varphi^{(3)}(0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \right).$$

et donc T_n tend vers $-\frac{1}{3}\delta_0^{(3)}$ au sens des distributions.

2. La distribution T_n est de la forme $ng(nx)$, mais ici la fonction g n'est pas intégrable au sens usuel. On ne peut donc pas conclure directement avec l'exercice vu pendant le TD. Soit φ une fonction-test à support dans $[-M, M]$, il vient

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-M}^{+M} \frac{\sin(nx)}{x}\varphi(x)dx.$$

Décomposons l'intégrale

$$\int_{-M}^{+M} \frac{\sin(nx)}{x}\varphi(x)dx = \int_{-M}^{+M} \frac{\sin(nx)}{x}\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx + \varphi(0)\int_{-M}^{+M} \frac{\sin(nx)}{x}dx.$$

Par une intégration par parties la première intégrale tendra vers 0 avec n. Enfin,

$$\int_{-M}^{+M} \frac{\sin(nx)}{x} dx = \int_{-nM}^{+nM} \frac{\sin(x)}{x} dx \longrightarrow \pi.$$

T_n tend donc vers $\pi\delta_0$ au sens des distributions.

3. On a pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} n \sin(nx)\varphi(x)dx.$$

Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} n \sin(nx)\varphi\,(x)\,dx &= [-\cos(nx)\varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi'\,(x)\,dx, \\ &= \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi'\,(x)\,dx. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale tend vers 0 (Riemann-Lebesgue ou IPP), donc T_n tend vers δ_0 au sens des distributions.

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la série :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(2^n \cdot 2\pi x)}{2^n},$$

et pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \sin(2^n \cdot 2\pi x)$.

1. La série définissant f est normalement convergente donc la fonction f existe et est continue. La fonction f est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et possède ainsi une dérivée au sens des distributions.

   Vous hardis mathématiciens, devriez jeter un coup d'oeil à ce papier historique [1] où la différentiabilité de pas mal de fonctions de type Weierstrass est étudiée.

2. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$. Appelons $K = \mathrm{Supp}(\phi)$. Un petit calcul nous donne

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(2^n \cdot 2\pi x)\phi(x)dx = \frac{1}{\pi 2^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \cos(2^n \cdot 2\pi x)\phi'(x)dx,$$

et donc

$$|\langle u_n, \phi \rangle| \leq \frac{1}{\pi 2^{n+1}} \int_K |\phi'(x)|dx = \mathcal{O}_{n \to +\infty}(2^{-(n+1)}).$$

3. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle s_k, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{k} \langle u_n, \phi \rangle,$$

qui est une série convergente par la question précédente. Il faut vérifier que la limite est bien dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ce que l'on a en écrivant

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Supp}(\phi) \subset K, \qquad |\langle s_k, \phi \rangle| \leq \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\pi 2^{n+1}} \right) \int_K |\phi'(x)|dx \leq C(K)\|\phi'\|_K$$

et en passant à la limite sur k.

4. Par convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et continuité de la dérivation, on a

$$f' = -2\pi \sum_{n\geq 0} u_n$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 7. 1. On veut obtenir la condition dite de Rankine-Hugoniot.

Première méthode. À la main. On écrit le problème au sens faible. On obtient que u est une solution faible de l'équation de Burgers si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+), \qquad \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} u\partial_t\varphi + \frac{u^2}{2}\partial_x\varphi\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} u^0(x)\varphi(0,x)dx = 0.$$

Il faut maintenant simplifier les intégrales en prenant en compte l'expression particulière de la solution. On ne traite que le cas $s>0$ (les autres cas $s=0$ et $s<0$ sont idem et donnent le même résultat). La première intégrale vaut :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} u\partial_t\varphi dxdt = \int_{\mathbb{R}^-}\int_{\mathbb{R}^+} u\partial_t\varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} u\partial_t\varphi dtdx$$

où

$$\int_{\mathbb{R}^-}\int_{\mathbb{R}^+} u\partial_t\varphi dtdx = -u^-\int_{\mathbb{R}^-}\varphi(0,x)dx$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} u\partial_t\varphi dtdx &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{\frac{x}{s}} u\partial_t\varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\frac{x}{s}}^{+\infty} u\partial_t\varphi dtdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{\frac{x}{s}} u^+\partial_t\varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\frac{x}{s}}^{+\infty} u^-\partial_t\varphi dtdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} u^+\left(\varphi\left(\frac{x}{s},x\right) - \varphi(0,x)\right)dx - \int_{\mathbb{R}^+} u^-\varphi\left(\frac{x}{s},x\right)dx \\
&= \left(u^+ - u^-\right)\int_{\mathbb{R}^+}\varphi\left(\frac{x}{s},x\right)dx - u^+\int_{\mathbb{R}^+}\varphi(0,x)dx \\
&= s\left(u^+ - u^-\right)\int_{\mathbb{R}^+}\varphi\left(x,sx\right)dx - u^+\int_{\mathbb{R}^+}\varphi(0,x)dx
\end{aligned}$$

La seconde intégrale vaut :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\frac{u^2}{2}\partial_x\varphi\; dxdt &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}}\frac{u^2}{2}\partial_x\varphi\; dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{-\infty}^{st}\frac{u^2}{2}\partial_x\varphi dxdt + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{st}^{+\infty}\frac{u^2}{2}\partial_x\varphi dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{-\infty}^{st}\frac{(u^-)^2}{2}\partial_x\varphi dxdt + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{st}^{+\infty}\frac{(u^+)^2}{2}\partial_x\varphi dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\frac{(u^-)^2}{2}\varphi\left(t,st\right)dt - \int_{\mathbb{R}^+}\frac{(u^+)^2}{2}\varphi\left(t,st\right)dt \\
&= \frac{(u^-)^2-(u^+)^2}{2}\int_{\mathbb{R}^+}\varphi\left(t,st\right)dt
\end{aligned}$$

Il vient finalement, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+)$,

$$s\left(u^+ - u^-\right) \int_{\mathbb{R}^+} \varphi\left(x, sx\right) dx + \frac{(u^-)^2 - (u^+)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \varphi\left(t, st\right) dt = 0,$$

qui est vraie pour toute fonction-test uniquement sous la condition $s = \frac{u^+ + u^-}{2}$ ou $u^+ = u^-$.

Deuxième méthode. Formule des sauts.

Pour éviter de refaire tous les calculs, on peut appliquer la formule des sauts multi-dimensionnelle. Écrivons-la dans sa généralité. Prenons $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet une discontinuité le long d'une hypersurface $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ et qui se prolonge par continuité de part et d'autre de cette discontinuité. Alors au sens des distributions,

$$T_{\partial_i f} = \{\partial_i f\} + [f_{ext} - f_{int}]\nu_i d\sigma,$$

où ν est la normale sortante à l'hypersurface Σ, ν_i sa i^{me} composante et $d\sigma$ est la mesure de surface définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad < d\sigma, \phi >= \int_\Sigma \phi(x) dS(x).$$

Pour l'appliquer dans notre cas, il faut écrire correctement le vecteur normal à $\{x = st\}$ dans le plan (x, t), c'est le vecteur $(1, -s)/\sqrt{1+s^2}$. Les dérivées partielles au sens des distributions sont donc données par :

$$T_{\partial_t u} = 0 + \left[u^+ - u^-\right] \frac{-s}{\sqrt{1+s^2}} d\sigma, \qquad T_{\partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)} = 0 + \left[\frac{(u^+)^2}{2} - \frac{(u^-)^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} d\sigma.$$

dont on déduit directement que $s = \frac{u^+ + u^-}{2}$ ou $u^+ = u^-$.

2. Déjà, la condition initiale elle-même est une solution faible pour tout temps au vu de la question précédente. Pour trouver une autre solution faible raisonnable, il faut visualiser le comportement physique attendu de la solution ayant pour donnée initiale $u_0(x)$. L'équation de Burgers dit qu'un point où la solution vaut 1 se propage instantanément à la vitesse 1, et qu'un point où la solution vaut -1 se propage instantanément à la vitesse -1. Autrement dit, on s'attendrait à ce que la partie $\mathbf{1}_{x>0}$ devienne $\mathbf{1}_{x>t}$ et que la partie $-\mathbf{1}_{x<0}$ devienne $-\mathbf{1}_{x<-t}$. Bon, mais il y a un trou au milieu maintenant. Il suffit d'en faire une solution continue, c'est une *détente* (ou onde de raréfaction) :

$$u_1(t, x) := -\mathbf{1}_{x<-t} + \left(\frac{x}{t}\right) \mathbf{1}_{-t<x<t} + \mathbf{1}_{x>t}.$$

C'est une fonction continue, qui est solution de Burgers sur chaque morceau (vérifier pour le morceau du milieu!) donc c'est une solution faible (pas de sauts). Pour créer une infinité de solution faible, il suffit d'attendre le temps que l'on veut avec la condition initiale, et de se détendre ensuite :

$$u_\alpha(t, x) := \begin{cases} u_0(x), & t \leq \alpha, \\ u_1(t - \alpha, x), & t > \alpha. \end{cases}$$

En fait, la plupart des solutions faibles ne sont pas acceptables physiquement. Il faudra un critère pour les sélectionner (qui sera vu dans la deuxième partie du cours). Dans ce cas présent l'onde de raréfaction u_1 est la seule solution vraiment physique, d'où le métathéorème, que vous pourrez appliquer juste après la fin de la lecture de cette phrase :

" La détente est la meilleure solution " ☺

Remarque : il existe d'autres solutions faibles qui ne sont pas des "détentes".

References

[1] G. H. Hardy, Weierstrass's Non-Differentiable Function, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 17, No. 3 (Jul., 1916) , pp. 301-325. URL: http://www.jstor.org/stable/1989005