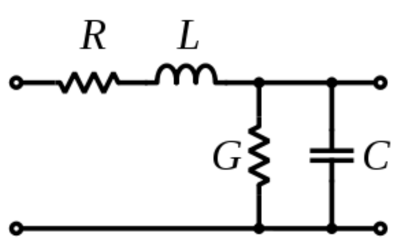

Devoir à la maison obligatoire 2.

Ce devoir est à rendre rédigé proprement *et sur copie soulignée et parfumée♡ à Emeric Bouin ou à Loïc Bourdin au plus tard le 10 avril 2014. Rellichez-vous bien avant de rendre votre copie, merci par avance.*

Exercice 1. Dans cet exercice, notre objectif sera de montrer l'existence d'une solution faible pour un problème elliptique *semi-linéaire.*

1. *Préliminaire physico-intéressant.*

   Une portion de ligne électrique peut être représentée par le quadripole ci-dessous où :



- La résistance linéique (*i.e.* par unité de longueur) R du conducteur est représentée par une résistance série (exprimée en ohms par unité de longueur). La caractéristique du résistor sera une *loi d'Ohm généralisée* $u = R(i)$.
- L'inductance linéique L (Henry par unité de longueur).
- La capacité linéique C entre les 2 conducteurs est représentée par un condensateur (Farad par unité de longueur).
- La conductance linéique G du milieu diélectrique séparant les 2 conducteurs est représentée par une résistance (Siemens par unité de longueur). La résistance dans ce modèle a une valeur de 1/G ohms.

Montrer que l'intensité i du courant dans la ligne électrique satisfait *l'équation des télégraphistes* :

$$LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \left(LG + CR'(i)\right)\frac{\partial i}{\partial t} - \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + GR(i) = g,$$

où vous direz ce que représente g. En déduire qu'un état stationnaire de la ligne électrique satisfait nécessairement l'équation elliptique :

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + GR(i) = g.$$

On remet à zéro les notations et on considère plus généralement le problème elliptique suivant : trouver $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + f(u) = g, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans tout l'exercice, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné régulier, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne sous-linéaire au sens suivant :

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Dans la suite, on notera c_f la constante de Lipschitz de f.

2. Donner une définition de solution faible et une définition de type variationnelle pour le problème (P).

3. Avec les outils de votre cours, pouvez-vous résoudre la formulation variationnelle ? Pourquoi ?

Il faut donc être plus astucieux et utiliser d'autres mathématiques. On peut dans ce cas utiliser une technique de point fixe. Soit $s \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, considérons le problème (P_s) où la non-linéarité est "figée", c'est-à-dire : trouver $u_s \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que

$$(P_s) \begin{cases} -\Delta u_s = g - f(s), & \text{dans } \Omega, \\ u_s = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Commençons par étudier le problème (P_s) en lui-même.

4. Pour tout $s \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, montrer l'existence et l'unicité de la solution u_s de (P_s).

5. On introduit alors l'application :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^2(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{L}^2(\Omega) \\ s & \longmapsto & u_s. \end{array}$$

   Justifier qu'un point fixe de Ψ est solution de (P).

On va maintenant montrer qu'effectivement Ψ admet un point fixe. Pour cela, il nous faut un théorème de point fixe en dimension infinie les amis. C'est le

> **Théorème** (Théorème de Schauder)**.** *Soit* E *un espace vectoriel normé et* C *un convexe fermé non vide de* E*. Soit* $\Psi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *continue telle que*
>
> - $\Psi(\mathrm{C}) \subset \mathrm{C}$,
> - $\Psi(\mathrm{C})$ *soit relativement compact dans* E.
>
> *Alors* Ψ *admet un point fixe, i.e. il existe* $x \in \mathrm{C}$ *tel que* $\Psi(x) = x$.

Dans la suite, on notera c_Ω la constante dans l'inégalité de Poincaré.

6. Montrer que :

$$\forall s, s' \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \|\Psi(s) - \Psi(s')\|_{\mathrm{L}^2} \leq c_f c_\Omega^2 \|s - s'\|_{\mathrm{L}^2}.$$

7. Notre objectif dans cette question est de trouver $r \geq 0$ tel que $\mathrm{C} = \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{L}^2}(0, r)$ vérifie $\Psi(\mathrm{C}) \subset \mathrm{C}$.

   (a) Montrer l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq k_\varepsilon + \varepsilon |x|.$$

(b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon \geq 0$ tel que :
$$\forall s \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \|u_s\|_{\mathrm{L}^2} \leq M_\varepsilon + \sqrt{2}c_\Omega^2 \varepsilon \|s\|_{\mathrm{L}^2}.$$

(c) Conclure cette question.

8. Montrer que $\Psi(\mathrm{C})$ est relativement compact dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

9. En déduire que Ψ admet un point fixe. Donner une condition suffisante sur c_f pour que ce point fixe soit unique.

Exercice 2 (Lax-Kilo again and again...). On considère le problème de Neumann suivant sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné régulier :
$$(P) \qquad \begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u) = f, & x \in \Omega, \\ -(A\nabla u) \cdot n = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$
avec $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$. Dans cet exercice, la matrice $A \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^{n\times n}$ est supposée uniformément définie positive. *L'objectif de cet exercice est de montrer que, sous une condition dite de compatibilité, (P) admet une unique solution faible à constante additive près.*

1. Donner la formulation variationnelle de (P) *(en montrant bien que (P) est équivalent).*

2. En déduire qu'une condition nécessaire pour que (P) admette au moins une solution faible est la condition de compatibilité suivante :
$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\, d\sigma(x).$$
Nous ferons donc cette hypothèse dans la suite.

3. Montrer que si (P) admet une solution faible alors celle-ci est unique à contante additive près.

4. Notre but est maintenant de montrer que (P) admet au moins une solution faible.

   (a) On considère l'espace
   $$\mathcal{H} = \left\{ u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega u\, dx = 0 \right\}.$$
   Montrer que $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et est donc un espace de Hilbert pour le même produit scalaire.

   (b) En se servant d'un exercice vu en TD, munir $\mathcal{H}$ d'un autre produit scalaire pour lequel il est toujours un espace de Hilbert.

   (c) Montrer que (P) admet une solution faible.

5. Conclure.