
Introduction aux équations de transport et aux solutions faibles

Exercice 1 (Origine physique de l'équation de conservation, point de vue Eulerien). Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. En tout point $x \in \Omega$ et en tout temps $t \geq 0$, on s'intéresse à une densité de particules notée $u(x,t) \in \mathbb{R}$ dont le mouvement est régi par un flux ϕ de la forme $\phi(x,t) = u(x,t)v(x,t) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $\omega \subset \Omega$, on note $m_\omega(t)$ la masse des particules sur ω donnée par

$$m_\omega(t) = \int_\omega u(x,t)\, dx.$$

Si ω admet un bord, on note $\eta_\omega(x)$ la normale unitaire à ω en $x \in \partial\omega$.

1. Pour tout "petit" volume $\omega \subset \Omega$, *le différentiel de la masse m_ω est égal à "ce qui rentre moins ce qui sort dans ω"*. Faire un dessin et traduire en terme d'équation ce principe.

2. En déduire que u vérifie l'équation de conservation suivante :

$$\forall (x,t) \in \Omega \times]0,+\infty[, \quad u_t(x,t) + \mathrm{div}_x(uv)(x,t) = 0.$$

3. Dans le cas où Ω admet un bord, on supposera qu'il n'y a pas de flux sortant, *i.e.* $\phi(x,t) \cdot \eta_\Omega(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et tout $t \geq 0$. Montrer que la masse totale m_Ω est conservée au cours du temps. *D'où le nom de l'équation de conservation...*

Exercice 2 (Origine physique de l'équation de transport, point de vue Lagrangien). On s'intéresse au transport d'une information $u_0(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ au cours du temps. En tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et en tout temps $t \geq 0$, on note $u(x,t)$ l'information "transportée". En particulier, on a $u(\cdot,0) = u_0$.

1. On suppose que l'information est exactement transportée le long de courbes $\xi : t \geq 0 \longmapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$. Faire un dessin et traduire en terme d'équation ce que signifie cette hypothèse.

2. En déduire que u vérifie l'équation suivante :

$$\forall t > 0, \quad u_t(\xi(t),t) + \xi'(t) \cdot \nabla_x u(\xi(t),t) = 0.$$

3. Généralement, les courbes ξ (appelées *caractéristiques*) sont régies par une équation différentielle de type

$$\xi'(t) = f(\xi(t),t),$$

dont le flot recouvre $\mathbb{R}^n$ en tout temps. Montrer qu'alors u vérifie l'équation de transport suivante :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[, \quad u_t(x,t) + f(x,t) \cdot \nabla_x u(x,t) = 0. \tag{1}$$

La classe des équations de transport est en fait plus large que celle ci-dessus. En effet, on peut prendre en compte que l'équation différentielle qui régit les caractéristiques soit dépendante de l'information u, ou encore que le transport de l'information peut se faire avec modification au cours du temps. On obtient alors une classe d'équations de transport de type :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[, \quad u_t(x,t) + f(x,t,u(x,t)) \cdot \nabla_x u(x,t) = g(x,t,u(x,t)).$$

4. Dans le cas d'une équation de transport "simple" de type (1) (sans terme source, *i.e.* $g = 0$, et telle que le champ de vitesse f est indépendant de u), donner une condition suffisante sur f pour que cette équation soit une équation de conservation. Donner un exemple.

5. Montrer qu'une équation de conservation est une équation de transport avec terme source. Préciser la valeur de f et g.

Exercice 3 (Résolution de l'équation de transport dans un cas simple). Dans cet exercice, on s'intéresse au cas le plus simple d'une équation de transport : champ de vitesse constant, sans terme source et condition initiale u_0 régulière. Plus précisément, on prend $c \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et on s'intéresse au problème de transport suivant :

$$\begin{cases} u_t + c \cdot \nabla_x u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction u donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u_0(x - ct)$$

est solution (au sens classique) du problème.

2. Faire un dessin.

3. Par la méthode des caractéristiques, montrer que cette solution est unique.

Exercice 4 (Let God be with you : Méthode des caractéristiques générale). Soit u une solution (au sens classique) du problème de transport suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) + f(x,t,u(x,t)) \cdot \nabla_x u(x,t) = g(x,t,u(x,t)) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ et ξ l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\forall t \geq 0, \quad \xi'(t) = f(\xi(t), t, u(\xi(t), t)) \quad \text{et} \quad \xi(0) = \xi_0.$$

On dit que ξ est une caractéristique du problème. Quel problème de Cauchy vérifie la fonction $v(t) = u(\xi(t), t)$?

La méthode des caractéristiques est basée sur la résolution des deux problèmes de Cauchy (EDO) ci-dessus ! *(voir exemples dans les exercices ci-après)*

Exercice 5 (Exemples de résolutions). Pour $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, résoudre les problèmes suivants :

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c u_x(x,t) = -u(x,t) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) + x u_x(x,t) = u(x,t) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

On pensera à dessiner les caractéristiques associées à chaque problème.

Exercice 6 (Équation de Burgers réfractée). Pour $u^0(x) = x$, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u(x,t) u_x(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Que se passe-t-il pour $u_0(x) = -x$?

Exercice 7 (Exemple sur un sous-espace). Pour $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} x u_t(x,t) + t u_x(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x > t > 0\} \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Exercice 8 (Exemple sur un sous-espace avec condition de bord). On considère le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c u_x(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[\times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) \qquad \forall x \geq 0 \\ u(0, t) = g(t) \qquad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

où f et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $c > 0$. Donner deux conditions de compatibilité entre f et g pour que le problème admette une solution au sens classique. Que se passe-t-il pour $c < 0$?

Exercice 9 (Transport libre à vitesse constante avec donnée initiale non régulière). On s'intéresse à un problème de transport de type :

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c \cdot \nabla_x u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la solution (au sens classique) est donnée par $u(x,t) = u_0(x - ct)$. *Comment donner un sens au fait que u soit solution de ce problème lorsque u_0 n'est pas régulière, voire discontinue ?* Dans la suite, on supposera donc u_0 seulement bornée localement sur $\mathbb{R}^n$.

1. On dira qu'une fonction u bornée localement sur $\Omega = \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$ est une **solution faible** du problème ci-dessus si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, on a :

   $$\int_\Omega u(x,t) \big[\varphi_t(x,t) + c \cdot \nabla_x \varphi(x,t)\big] \, dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx = 0.$$

   Montrer qu'une solution classique (lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) est une solution faible. Quel est l'intérêt d'une telle définition ?

2. Montrer l'unicité (au sens presque partout) d'une solution faible. Pour cela, on s'intéressera à la solution $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ du problème de transport suivant :

$$\begin{cases} \varphi_t(x,t) + c \cdot \nabla_x \varphi(x,t) = \psi(x,t) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \end{cases}$$

où $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ quelconque et φ_0 choisi convenablement. On écrira φ sous une forme intégrale dépendante de ψ (formule de Duhamel).

3. Dans le cas où $n = 1$, $c > 0$ et $u_0(x) = H(x)$ la fonction d'Heaviside, donner explicitement l'unique solution faible du problème.

Exercice 10 (Introduction aux phénomènes de choc). On s'intéresse au problème de transport suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \tan(u(x,t)) u_x(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

avec $u_0(x) = -\arctan(x)$ et où la solution u recherchée est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Dessiner l'évolution de la solution u au cours du temps. Que se passe-t-il ?
2. Expliciter la solution classique du problème. En quel temps constate-t-on un phénomène de choc ?
3. Que suggérez-vous pour définir une solution définie en tout temps ?