École Normale Supérieure de Lyon **Année 2013–2014**

Département de Mathématiques **Analyse-EDP TD 1**

Distributions - Partie 1

Exercice 1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) \, dx,$$

Montrer que T est d'ordre exactement 1 puis déterminer le support de T.

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $T_f = \delta_0$.

Exercice 3. Montrer que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Quel est son ordre ?

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ soit donnée par la fonction $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ pour que $T = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ soit une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre 0.

Exercice 6.

1. Pour $\varepsilon > 0$, calculer une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x+i\varepsilon}$.
2. Montrer que l'on définit une distribution sur $\mathbb{R}$ en posant
$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon}.$$
et l'exprimer à l'aide de distributions usuelles.
3. Calculer
$$\frac{1}{x-i0} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x-i\varepsilon}.$$
et en déduire
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Exercice 7. Calculer les limites des suites suivantes au sens des distributions :

$$T_n(x) = \sin(nx), \qquad T_n(x) = ng(nx), \qquad T_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}, \qquad T_n(x) = n\sin(nx) 1_{x>0},$$

où $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Étudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des suites suivantes, ainsi que le support et l'ordre des limites éventuelles :

$$n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right), \qquad n^2\left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta_0\right), \qquad n^3\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}} + \frac{2}{n}\delta_0'\right), \qquad \left(\delta_0 - \frac{1}{n}\delta_{\frac{1}{n}}\right)''.$$

Exercice 9. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact K inclus dans $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$.
- Il existe $A > 0$, $M > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{B(0,A)} |f_n(x)|\, dx \leq M.$$

- Pour tout $0 < a < A$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,a)} f_n(x)\, dx = 1.$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers δ_0 au sens $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Donner des exemples.