

DISTRIBUTIONS - PARTIE 2

EXERCICE 1. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ telle que $\text{supp } T = \{0\}$.

1. Justifier que T est d'ordre fini que l'on notera $m \in \mathbb{N}$. *Remarque : ce résultat se généralise à toute distribution à support compact.*
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0. Soit ρ une fonction plateau valant 1 au voisinage de 0 et 0 en dehors de $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Pour tout $r > 0$, on note $\rho_r = \rho(\frac{\cdot}{r})$.

(a) Soit $\ell \leq m$. Montrer que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|(\rho_r \varphi)^{(\ell)}\|_\infty = 0.$$

(b) En déduire que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que φ s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \psi(x),$$

où ψ est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0.

4. En déduire l'existence de $a_0, \dots, a_m$ tels que :

$$T = \sum_{k=0}^m a_k \delta_0^{(k)}.$$

EXERCICE 2. 1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que $fT = 0$ au sens des distributions. Que dire du support de T ?

2. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\sin(x)T = 0, \quad x^3 \sin(x)T = 0, \quad P(x)T = 0, \quad \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)T = 0.$$

EXERCICE 3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une approximation de l'unité. Étudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de la suite $g_n(x, y) = f_n(y - x^2)$. Quel est le support de la limite?

EXERCICE 4. 1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et ρ une fonction plateau centrée en 0. Montrer qu'il existe $\psi_\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = \varphi(0)\rho(x) + x\psi_\varphi(x)$.

2. Montrer que pour toute distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = S$.

3. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$xT = 1, \quad xT = \delta_0, \quad xT = \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right).$$

EXERCICE 5. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xT' + T = 0$.

EXERCICE 6 (Parties finies). 1. Soit $\alpha < -1$ un réel tel que $|\alpha| \notin \mathbb{N}$. Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} x^{\alpha} \varphi(x) dx = P_{\varphi}(\varepsilon) + R_{\varphi}(\varepsilon),$$

où $R_{\varphi}(\varepsilon)$ est une combinaison linéaire de puissances strictement négatives de ε et $P_{\varphi}(\varepsilon)$ admet une limite lorsque ε tend vers 0^+ .

2. Montrer que poser

$$\langle \text{pf}(x_+^{\alpha}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P_{\varphi}(\varepsilon),$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer les distributions $x \text{pf}(x_+^{\alpha})$ et $\frac{d}{dx} \text{pf}(x_+^{\alpha})$.

EXERCICE 7. Étudier un développement limité de

$$U_{\varepsilon}(\phi) = \iint_{x^2+y^2 \geq \varepsilon^2} \phi(x, y) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy.$$

pour ϕ une fonction test. En déduire une distribution sur $\mathbb{R}^2$ dont la restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ soit donnée par $(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

EXERCICE 8 (Solution fondamentale du Laplacien en dimension 2). On définit $E(x) = \frac{1}{2\pi} \log(|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

1ère méthode (pour les bébés).

1. Montrer que $\Delta E = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et que $E \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Démontrer que E est une solution fondamentale du Laplacien, *i.e.* que E satisfait :

$$\Delta E = \delta_0,$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. On pensera à travailler sur Ω_{ε} le complémentaire de $B(0, \varepsilon)$ dans $\mathbb{R}^2$ et à faire tendre ε vers 0^+ . On pensera également à utiliser la formule de Green.

2ème méthode (pour les grands). Redémontrer le résultat ci-dessus à l'aide de la fonction

$$f_{\varepsilon} := \begin{cases} \log(|x|), & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \\ \log \varepsilon, & \text{si } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

puis à l'aide de la fonction

$$g_{\varepsilon} := \begin{cases} \log(|x|), & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \\ a_{\varepsilon}|x|^2 + b_{\varepsilon}, & \text{si } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

avec des coefficients a_{ε} et b_{ε} convenablement choisis.